Estudio sobre Largos Virtuales

POR

RAUL SIMON

I.—Generalidades

Los gastos generales de una explotación de FF. CC. pueden dividerse en:

A.—Gastos de amortización e intereses de los capitales invertidos y de conservación de las obras;

B.—Gastos de adquisición y conservación de equipo;

C.—Gastos de acarreo.

De estos gastos sólo los de acarreo crecen proporcionalmente con el tráfico.

El gasto específico, es decir, el costo por tonelada transportada, depende del trabajo efectuado en el transporte.

Los *largos virtuales* se determinan con el objeto de conocer exactamente este trabajo.

II.—Teoría general de los largos virtuales

Largo virtual de una línea es la longitud equivalente en recta y horizontal.

Esta equivalencia puede referirse a muchos puntos. Pero a nosotros nos interesa especialmente la relativa al trabajo mecánico efectuado por el tren.

Para nuestro caso tendríamos entonces que:

«Largo virtual es la longitud ideal recta y horizontal que origina el mismo trabajo que la línea efectiva».

Siendo, r_0 = resistencia en recta y horizontal

r_i = resistencia de las gradientes

r_c = resistencia de las curvas

el trabajo efectuado por el tren entre dos puntos sería:

$$T = L \cdot r_0 + \Sigma l_i r_i + \Sigma l_c r_c$$

El largo virtual, por definición recto y horizontal, debe producir un trabajo igual. Sea L_v el largo virtual. Entonces

$$T = L_v r_0 = L r_0 + \Sigma l_i r_i + \Sigma l_c r_c$$

1) $$L_v = \frac{L r_0 + \Sigma l_i r_i + \Sigma l_c r_c}{r_0}$$

l_i, representa cada longitud en gradiente

l_c, representa cada longitud en curva

L, es la longitud efectiva total.

El *coeficiente virtual* de la línea será la relación entre el largo virtual y el efectivo

2) $$a = \frac{L_v}{L}$$

Puede llegarse también a la expresión del largo virtual partiendo de los coeficientes virtuales medios.

Sea l un trozo de vía que presente, en su caso más general, las resistencias r_0, r_i, r_c.

Si l_v es el largo virtual correspondiente a ese trozo se tendrá, por definición:

$$3) \qquad l_v = \frac{l\, r_0 + r_i + r_e}{r_0} = l \left(1 + \frac{r_i}{r_0} + \frac{r_e}{r_0} \right)$$

$$l_v = l\, a$$

$$4) \qquad L_v = \Sigma\, l_v = \Sigma\, l\, a$$

Según el caso se aplicarán las fórmulas (1) o (4).

Conocida ahora la teoría general de los largos virtuales pasaremos a calcular los valores r_i, r_e y r_0.

III.—Resistencias de un tren en marcha

Como los esfuerzos son proporcionales a las masas en movimiento, consideraremos un tren cuya masa sea igual a una tonelada masa, correspondiente a una tonelada de peso.

La expresión general de las resistencias de un tren en marcha es:

$$F = a + r_i + r_e + r_0$$

Si suponemos el tren ya en marcha y con movimiento uniforme, la aceleración se hace cero y el primer término desaparece.

a) *Valor de* r_i *en* $\left[\frac{\text{Kg.}}{\text{ton.}} \right]$

La resistencia r_i proviene de la componente de la gravedad paralela a la vía. En gradiente es un esfuerzo retardatriz.

Si (i) es el ángulo que la vía forma con la horizontal, se tendrá

$R_i = P \operatorname{sen} i = P \operatorname{tg} i$ por tratarse de pequeñas inclinaciones.

Pongamos P en toneladas e (i) en $\left[\frac{\text{m m}}{\text{m}} \right]$ nos resulta

$$R_i = P \text{ ton } \frac{i \text{ m m}}{1000 \text{ m m}} = P\, i \text{ Kg}$$

Luego, una gradiente de i $\left[\frac{\text{m m}}{\text{m}} \right]$ representa una resistencia de (i kilógramos por tonelada de tren.

$$\frac{R_i}{P} = r_i = i \left[\frac{Kg}{ton}\right]$$

b) *Valor de* r_c *en* $\left[\frac{Kg}{ton}\right]$

Se ha demostrado que hasta 45 km/h estas resistencias no varían con la velocidad. Dependen principalmente del radio de la curva y de la trocha de la vía. Su expresión general es:

$$r_c = k \frac{e}{R} \left[\frac{Kg}{ton}\right]$$

k es una constante determinada experimentalmente
e es la trocha de la vía
R el radio en m. de la curva.

En Chile se acostumbra para

trocha de 1.00

$$r_c = \frac{400}{R} \left[\frac{Kg}{ton}\right]$$

trocha de 1.68

$$r_c = \frac{500}{R} \left[\frac{Kg}{ton}\right]$$

Conviene advertir que en nuestros FF. CC. no se ha determinado experimentalmente estas resistencias.

c) *Valor de* r_o *en* $\left[\frac{Kg}{ton}\right]$

En el valor de r_o deben comprenderse *todas* las resistencias que encuentra un tren al moverse en recta y horizontal. Las principales son la del rodado, de los organismos del tren y la que presenta el aire.

Varían ***principalmente con el cuadrado de la velocidad.***

Su valor se determina prácticamente por medio de experiencias especiales de las cuales cada administración deduce las fórmulas correspondientes.

Existen fórmulas globales que comprenden las resistencias combinadas de los wagones, ténder y locomotora.

Las más conocidas son:

Fórmula de Barbier...... $r_o = 2{,}36 + 0{,}0245\,V + 0{,}000613\,V^2$
» Prusiana...... $r_o = 2{,}4 + 0{,}001\,V^2$
» Belga......... $r_o = 1{,}83 + 0{,}0845\,V$

V en (Km/h)
r_0 en (Kg./ton)

Es más conveniente deducir la resistencia media r_0 del tren, considerando las resistencias parciales de los wagones, ténder y locomotora.

Existen numerosas fórmulas experimentales para cada uno de estos casos. El libro del Ingeniero Santa María cita varias de ellas.

Damos aquí las fórmulas de Frank por ser las más modernas.

	de la locomotora..............	$Rl = 2.6\sqrt{a} + 0{,}00075\ V^2$ (Kg/ton)
5)	wagones de carga.............	$Rw = 2.5 + 0{,}00052\ V^2$ »
	wagones de pasajeros.........	$Rw = 2.5 + 0{,}0004\ V^2$ »

Con las fórmulas parciales y pesos de la locomotora, ténder y wagones se puede determinar entonces la resistencia r_0 por tonelada de tren.

Sea un tren de peso total

$$P = L + W \text{ toneladas}$$

6) $$r_0 = \frac{Rl.L + Rw.W}{L + W} \quad (\text{Kg ton})$$

NOTA: —En las fórmulas de Frank (a) representa el número de ejes acoplados de la locomotora.

La resistencia del ténder se considera comprendida en la de los wagones.

Este modo de calcular r_0 es el más recomendable por cuanto permite considerar el efecto de la *composición del tren.*

Se llegaría a una exactitud mucho mayor si se dispusiese de *fórmulas experimentales propias para nuestros wagones, ténders y locomotoras.*

IV.—Cálculo de largos virtuales

Casos que pueden presentarse.

De lo expuesto en los párrafos anteriores deducimos que *los largos virtuales dependen a la vez de las resistencias accidentales de la vía, del equipo y de la velocidad del tren.*

Las resistencias accidentales influyen por los valores

$$r_i = f(i) = i\ \frac{m\ m}{m} = i\ \frac{Kg}{ton}$$

$$r_c = f(R) = \frac{c.\,\text{trocha}}{R} \text{ en } \frac{Kg}{ton}$$

La velocidad del tren y sus características influyen en el valor de r_0

$$r_0 = f(V^2) = A + B\,V + C\,V^2$$

Los valores de A, B y C son los coeficientes, *determinados experimentalmente*, y que reflejan las características del equipo.

Los casos más corrientes que pueden presentarse son:

a) No se considera la velocidad como variable.

b) Fórmulas de Baume.

c) Velocidades establecidas por itinerarios.

d) Caso de proyectos de explotación en que hay que determinar la velocidad conocidos la locomotora y peso del tren. Velocidades de máximo rendimiento.

e) Cálculos de largos virtuales de líneas en explotación, por medio de la determinación directa de la energía.

a) *No se considera la velocidad como variable.*

Si no se considera la velocidad como variable se tendrá, por lo tanto:

$$r_0 = \text{constante}$$

$$L_v\, r_0 = L\, r_0 + \Sigma\, l_i\, r_i + \Sigma\, l_c\, r_c$$

$$L_v = L + \Sigma \left(l_i \frac{r_i}{r_0} \right) + \Sigma \left(l_c \frac{r_c}{r_0} \right)$$

Esta fórmula se presta para la confección de tablas prácticas.

El valor r_0 puede tomarse de datos experimentales que correspondan a las circunstancias del caso.

La velocidad que se va a suponer constante puede ser la velocidad media entre la máxima y la mínima admisible.

b) *Fórmula de Baume.*

El Ingeniero señor Mate de Luna publicó en los Anales del Instituto de Ingenieros una exposición sobre el método de Beaume y una aplicación a los largos virtuales de la Red Central Sur de los FF. CC. del Estado.

Baume considera una locomotora tipo y un tren tipo. Esto supone también una potencia y velocidad determinadas.

Esta velocidad está fijada por la potencia de la *locomotora tipo y peso del tren tipo.* Dicha velocidad varía en algo durante la marcha debido a las velocidades accidentales r_i y r_e

M. Baume dá la fórmula

$l_v = l\,(1 + a + b)$, que es la misma formula (3) determinada anteriormente.

$$l_v = l\left(1 + \frac{r_i}{r_0} + \frac{r_e}{r_0}\right) = l\left[1 + f(i) + f(R)\right]$$

$$L_v = \Sigma\, l_v$$

Baume hace

$$f(i) = a = \frac{139{,}31 + 0{,}0468\ i^2 - 0{,}0007\ i^3}{436{,}5 - 8{,}55\ i + 0{,}0693\ i^2 - 0{,}00031\ i^3}$$

$$f(r_e) = b = \frac{32{,}787 + 116\,594\ R}{48.549 - 7156\ R + 436{,}5\ R^2}$$

Agrega una tabla que dá los valores de (a) y (b) para los valores correspondientes de (i) y de (R).

No conozco el orígen de las fórmulas que expresan los valores de (a) y (b). Pero es indudable que los coeficientes deben corresponder a las características del equipo y de la vía, y las funciones complicadas de (i) y de (R) tienen que expresar la influencia de r_0 y la variación de r_0 con las resistencias accidentales (i) y (R), puesto que

$$r_0 = f\,(V^2)$$

$$V = f\,(i, R)$$

Las fórmulas y tablas de Baume podrán ser excelentes para trenes de iguales características y locomotoras de igual potencia que las que él considera.

Con una locomotora de potencia distinta y otro esfuerzo de tracción tendríamos otra velocidad

$$V_1 = \frac{N_1\ HP\ \ 3.6\ \ 75}{F_1\ Kg}\ \ \frac{Km}{hora}$$

y entonces r_0 valdrá

$$r_0 = A + B\,V_1 + C\,V_1^2$$

Todavía hay que advertir que la resistencia $r_o = f(V^2)$ se produce en *todo el trayecto.* Sólo esta variación de la velocidad haría cambiar enteramente los resultados.

c) *Caso de velocidades establecidas por itinerarios.*

Este caso se presenta corrientemente en las líneas en explotación. Se conoce aquí la velocidad media entre estaciones y la composición del tren. Se calcula entonces el $r_o = f(V^2)$ correspondiente a esta velocidad. No hay que olvidar que la ecuación de r_o en función de V tiene coeficientes que dependen del equipo y de la vía. Si no se ha determinado experimentalmente estos coeficientes debe adoptarse el valor de r_o deducido de las fórmulas ya explicadas.

$$r_o = \frac{Rl.L + Rw.W}{L + W}$$

$$\begin{aligned} Rl &= 2{,}6\ la + 0{,}00075\ V^2 \\ Rw\ \text{carga} &= 2{,}5 + 0{,}00052\ V^2 \\ Rw\ \text{pasaj.} &= 2{,}5 + 0{,}0004\ V^2 \end{aligned}$$

$$V \text{ en } \left[\frac{\text{Km}}{\text{hora}}\right]$$

L y W en toneladas

$$r_o \text{ en } \left[\frac{\text{Kg}}{\text{ton}}\right]$$

Conocido r_o se determina después los valores de r_e y de r_i correspondientes a cada longitud l_e y l_i

1) $$L_v = \frac{L\ r_o + \Sigma\ l_i\ r_i + \Sigma\ l_e\ r_e}{r_o}$$

L es la longitud entre estaciones a la cual corresponden una sola velocidad de itinerario v, por lo tanto, un valor constante de r_o.

d) *Largos virtuales para un proyecto de explotación. Velocidad dependiente de las resistencias accidentales.*

Se conoce en este caso la locomotora, el tren y la vía. Se trata de determinar el largo virtual. Se tiene, desde luego, que

$$r_v = f(V)$$
$$V = f(r_i, r_c, F, N)$$
V = velocidad
F = esfuerzo de tracción
N = potencia de la locomotora

El largo virtual es muy difícil de determinar por cuanto no se puede calcular exactamente el valor de r_v correspondiente a cada trozo, ya que este valor debe calcularse en función de la *velocidad de máximo rendimiento en el trozo considerado.*

Tendremos la suficiente aproximación si calculamos r_v en función de la *velocidad media de máximo rendimiento entre las distintas estaciones.*

Para tener la velocidad de máximo rendimiento será preciso conocer, desde luego, *la resistencia accidental media entre estaciones*, que valdrá

$$\frac{\Sigma r_c l_c}{L} + \frac{\Sigma r_i l_i}{L} = R_c + R_i$$

siendo

l_c = largo de una curva cualquiera
l_i = largo de una gradiente o pendiente cualquiera
L = distancia entre estaciones

Con los valores de las resistencias accidentales medias entre estaciones, con el peso del tren arrastrado y con la potencia de la locomotora podemos escribir la ecuación que iguala el esfuerzo de tracción con la suma de las resistencias.

Esfuerzo de tracción =

Resistencias de la locomotora + resistencias de los wagones + resistencias de las curvas + resistencias de las gradientes.

$$F = \frac{N . 270}{V} = (2,6 + a + 0,0075 V^2) L$$
$$+ \begin{pmatrix} 2,5 + 0,00052 V^2 \\ 2,5 + 0,0004 V^2 \end{pmatrix} W$$
$$+ (L + W) R_c$$
$$+ (L + W) R_i$$

N = potencia en HP
L = peso de la locomotora en toneladas
W = peso de los wagones y ténder en toneladas
R_c = resistencia media de las curvas entre estaciones, en Kg. ton
R_i = resistencia media de las gradientes en Kg. ton

Para la resistencia de los wagones se considerará la fórmula que corresponda a wagones de carga o de pasajeros, según el caso.

En esta ecuación no hay más incógnita que la velocidad. Reemplazando los valores se llega a una ecuación de 3.er grado de la forma

$$\frac{a}{V} \quad b V^2 - c = 0$$

El método más sencillo para resolverla es el de Newton. Sea x un valor aproximado. El error de la aproximación será

$$d = - \frac{f\ x}{f'\ x}$$

Entonces, la raíz de la ecuación, o sea, el valor buscado de V, será $= x \pm d$.

Conocidas estas *velocidades medias de máximo rendimiento* para todos los trayectos entre estaciones, se determinan entonces los valores correspondientes de r_0 por medio de la fórmula global

$$r_0 = \frac{Rl . L + Rw . W}{L + W}$$

Con los valores medios R_0, R_c , R_i se concluye por determinar los coeficientes y largos virtuales. Basta disponer los datos como en el cuadro esquemático indicado.

Estaciones	L = distancia entre estaciones	$R_c = \frac{\Sigma l_c r_c}{L}$	$R_i = \frac{\Sigma l_i r_i}{L}$	V = velocidades de máximo rendimiento entre estaciones	$R_o = f(V)$	$a = \frac{R_o + R_c + R_i}{R_o}$ coef. Virtual	L a = largos entre estaciones
	Distancia total						Largo virtual total

$$\text{Coef. virtual total} = \frac{\text{Largo virtual total}}{\text{Distancia total}}$$

Debe determinarse los largos virtuales para los trenes de carga, pasajeros y expresos, pues tienen distinto equipo y velocidades distintas.

Podria hacerse un sólo cálculo considerando un *tren tipo* o *Standart* que puede ser un tren medio o el tren que desarrolle el mayor trabajo, según el objeto del estudio.

En otro párrafo estudiaremos los largos virtuales de bajada.

e) *Largos virtuales de líneas en explotación, considerando los trabajos teóricos efectuados..*

Se descompone el tren en locomotora y wagones. Se consideran las velocidades medias entre estaciones, con las cuales se calculan los valores r_o por medio de las fórmulas de Frank. Quiere decir esto que el valor r_o se considera constante entre estaciones.

Se descompone enseguida el trayecto entre estaciones en tantas distancias

Kilometraje	Estaciones	Distancia entre estaciones	Tiempo de marcha entre estaciones	Velocidad media Km hora V	Resistencia en recta y horizontal r_o L	Resistencia en recta y horizontal r_o W	Distancias parciales d	Resistencias accidentales medias en d $c \pm i$	Esfuerzos de tracción en Kg. Por 1 tonelada de locomotora $F_L = r_L + c \pm i$	Esfuerzos de tracción en Kg. Por 1 ton. de wagón o tender $F_W = r_W + c \pm i$	Energía necesaria en Kilográmetros $T_L = F_L \cdot d$	Energía necesaria en Kilográmetros $T_W = F_W \cdot d$	Energía en recta y horizontal $r_L \cdot d$	Energía en recta y horizontal $r_W \cdot d$
							Σd				$\Sigma F_L \cdot d$	$\Sigma F_W \cdot d$	$\Sigma r_L \cdot d$	$\Sigma r_W \cdot d$

Resistencia media en recta y horizontal.
- Por ton. de wagones $R_{HW} = \dfrac{\Sigma r_W \cdot d}{\Sigma d}$ Kg.
- Por ton. de locomotora $R_{HL} = \dfrac{\Sigma r_L \cdot d}{\Sigma d}$ Kg.

Resistencia media total . . . . . .
- Por ton. de wagones $= R_{TW} = \dfrac{\Sigma F_W \cdot d}{\Sigma d}$ Kg.
- Por ton. de locomotora $= R_{TL} = \dfrac{\Sigma F_L \cdot d}{\Sigma d}$ Kg.

Coeficiente virtual
- wagones $a_W = \dfrac{R_{TW}}{R_{HW}}$
- Locomotora $a_L = \dfrac{R_{TL}}{R_{HL}}$

parciales (d) como cambios de pendiente, repartiendo el efecto de las curvas en estas distancias.

Se encuentran así los valores

$$c \pm r_i$$

$$\text{siendo } c = \frac{\Sigma \, l \, r_c}{d}$$

La resistencia media en esa distancia (d) será

$$F = (r_0 + c \pm r_i) \text{ Kg.}$$

Y el trabajo

$$T = F \, d = d \, (r_0 + r_c \pm r_i) \text{ m Kg.}$$

El trabajo en horizontal valdrá

$$r_0 \, . \, d \text{ m Kg.}$$

Se hace el cálculo para la locomotora y los wagones con ténder, cambiando en cada caso únicamente el valor r_0.

La suma de los trabajos parciales dará el trabajo total entre estaciones o en la linea.

Dividido este trabajo por la distancia total encontraremos la *resistencia media total.*

De igual manera se encuentra la *resistencia media en recta y horizontal.*

El coeficiente virtual medio será entonces la relación entre ambas resistencias.

Damos un esquema del método de cálculo.

Los valores de i pueden ser negativos. Igualmente los valores de $F = r + c \pm i$ pueden resultar negativos. En este caso háganse igual a cero, por cuanto los frenos no permiten recuperar energía. Por otra parte, el trabajo de un tren frenado es igual a cero, porque en este caso sólo trabaja la gravedad y no hay consumo teórico de combustible.

Determinación del consumo de energía

Con este método de cálculo es muy fácil determinar el consumo de energía de los trenes en cualquier periodo de tiempo.

Tenemos ya las resistencias medias totales por *tonelada de locomotora y wagones y por unidad de longitud.*

Basta entonces multiplicar dichos valores por los pesos de la locomotora y wagones y por las longitudes recorridas.

Se obtiene así el *trabajo total en Kgm.* y, por lo tanto, el número necesario de calorías y cantidad de combustible.

Puede reducirse el trabajo a HP hora y multiplicar por 3,5 Kg. de carbón que es la cifra media para nuestros FF. CC.

Las estadísticas dan el número anual de *ejes kilómetros* y de *locomotoras kilómetros.*

V.—Largos virtuales de bajada

Los largos virtuales deben calcularse en ambos sentidos. Los valores de r_i cambiarán de signo.

En una pendiente (i) se tendrá

$$l_v = \frac{l\,(r_0 + r_c - r_i)}{r_0} - L.a$$

En teoría pueden presentarse estos casos

I.— $(r_0 + r_c) > r_i$ La locomotora trabaja
II.— $(r_0 + r_c) = r_i$ La locomotora no trabaja
III.— $(r_0 + r_c) < r_i$ La locomotora absorve trabajo

Este último caso no se produce en la práctica por cuanto los frenos se encargan de mantener una velocidad constante compatible con la vía y el equipo. Esta velocidad es la *máxima admisible.*

Si no existiera esta limitación de la velocidad, el tren adquiriría energía cinética en las bajadas, la que aprovecharía enseguida en vencer las resistencias.

Por otra parte, en los trayectos en bajada, aunque se necesiten los fremos, la locomotora mantiene sus fuegos encendidos y hay siempre consumo de combustible. Se acostumbra hacer este consumo igual al del tren en recta y horizontal a la misma velocidad, a causa de los desgastes producidos por los mayores rozamientos.

Si en una pendiente fuerte se verifica que

$$(r_0 + r_c) < r_i$$

debe hacerse entonces

$$F = (r_0 + r_c - r_i) = r_0$$

$$l_v = l\left(\frac{r_0}{r_0}\right);\ a = l$$

El valor r_0 es el correspondiente a la velocidad máxima admisible.

Es un error creer que la diferencia $r_i - (r_0 + r_c)$ origine un trabajo desarrollado por los frenos y que sea ese el valor que se deba considerar en los largos virtuales.

Para demostrarlo basta suponer todas las ruedas caladas y que el tren sea arrastrado por deslizamiento. El trabajo es producido por la gravedad. Puede suponerse al tren como a un cuerpo cualquiera homogéneo sin que exista freno alguno.

Muchas administraciones no admiten para una vía un coeficiente virtual menor que la unidad. Esto equivale a considerar *que el trabajo mínimo entre dos puntos es el efectuado en recta y horizontal.*

VI.—Conclusión

Creemos necesario uniformar el cálculo de largos virtuales adoptando métodos qne permitan considerar las características del equipo.

Según se trate de proyectos de explotación o de líneas en explotación nos atrevemos a recomendar los métodos (d y (e) por las siguientes razones:

1ª.—Apartan las influencias de las resistencias accidentales, que quedan invariables respecto de cualquier equipo

2.ª—Los valores r_0 se determinan en función de la velocidad y del equipo.

3.ª—Es fácil corregir los valores de los largos virtuales para un cambio de equipo y velocidad. Basta para ello modificar los valores de los r_0, quedando constante la influencia de las resistencias accidentales y

4.ª—Permiten desarrollar la experimentación para el mejoramiento de las fórmulas usadas.