ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Sucesor

De la: «SOCIEDAD DE INGENIERIA» Fundada el 31 de Mayo de 1888

Y del: «INSTITUTO DE INGENIEROS» Fundado el 28 de Octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de Diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXII ● SEPTIEMBRE - OCTUBRE DE 1949 ● N.os 9 - 10

Comisión Editora: *Raúl Sáez S. (Pdte.), Carlos Ponce de León, Jorge von Bennewitz y José Pablo Domínguez*

Ing. Jorge del Río B.

División de Estructuras

Método de los relajamientos (Relaxation Method) aplicado a los marcos rígidos y vigas continuas

El método de los relajamientos ha sido aplicado a numerosos problemas bien conocidos y ha demostrado ser un método magnífico para la resolución de ciertos problemas especiales.

El autor de este artículo expone sus ideas respecto a la extensión de este método a los marcos rígidos y vigas continuas y cree que el procedimiento aquí empleado presenta ventajas sobre otros métodos hasta ahora conocidos en ciertos problemas especiales. Este procedimiento puede sin duda ser mejorado ya que es posible establecer ciertas reglas y relaciones que aceleren la convergencia y por lo tanto llegar a un resultado más rápidamente.

Recordemos primeramente en qué consiste este método y para esto resolvamos por relajamiento el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
12x + y + z &= 17 \quad (1)\\
x + 14y + 2z &= 35 \quad (2)\\
2x + 2y + 15z &= 51 \quad (3)
\end{aligned}
$$

Como sabemos el método de los relajamientos opera con los residuos diferenciándolo por esto del método de interación.

Las ecuaciones anteriores deberán por lo tanto escribirse:

$$12x + y + z - 17 = R_1 = 0$$
$$x + 14y + 2z - 35 = R_2 = 0$$
$$2x + 2y + 15z - 51 = R_3 = 0$$

donde R_1, R_2 y R_3 son los residuos.

Para $x=1$ $y=0$ $z=0$, los residuos son:

$R_1=12$
$R_2=1$
$R_3=2$

Para $x=0$ $y=1$ $z=0$, los residuos son:

$R_1=1$
$R_2=14$
$R_3=2$

Para $x=0$ $y=0$ $z=1$, los residuos son:

$R_1=1$
$R_2=2$
$R_3=15$

Con estos valores podemos construir la siguiente tabla de operaciones (operation table)

	R_1	R_2	R_3
$x=1$	12	1	2
$y=1$	1	14	2
$z=1$	1	2	15

Observemos que los valores de la diagonal principal son bastante grandes comparados con los demás valores y recordemos que mientras más grandes sean estos valores relativos más rápida va a ser la convergencia. Estos valores se presentan siempre favorables en todos nuestros problemas.

En seguida resolvamos el sistema de ecuaciones operando siempre con los residuos y utilizando la tabla de operaciones anterior.

	x	y	z	R_1	R_2	R_3
	0	0	0	—17	—35	—51
	1	0	0	— 5	—34	—49
	0	0	3	— 2	—28	— 4
	0	2	0	0	0	0
Suma	1	2	3			

Y obtenemos así: $x=1 \quad y=2 \quad z=3$

Expliquemos lo que hemos hecho aquí: Para valores, $x=y=z=0$ los residuos son $R_1=-17$, $R_2=-35$ y $R_3=-51$.

Si damos a x el valor 1 y a $y=z=0$ tendremos de la tabla de operaciones $R_1=12$ $R_2=1$, $R_3=2$ y por lo tanto los nuevos residuos en la tabla de residuos serán:

$$R_1 = -5 \qquad R_2 = -34 \qquad R_3 = -49$$

Si damos ahora a z el valor 3 tendremos en la misma forma los residuos:

$$R_1 = -2 \qquad R_2 = -28 \qquad R_3 = -4$$

Y si por último damos a y el valor 2 obtendremos como residuos $R_1= R_2= R_3=0$ finalizando así el problema.

Como se ve es fácil calcular los valores x, y, z con este método ya que siempre es fácil ir dando valores observando los residuos y la tabla de operaciones.

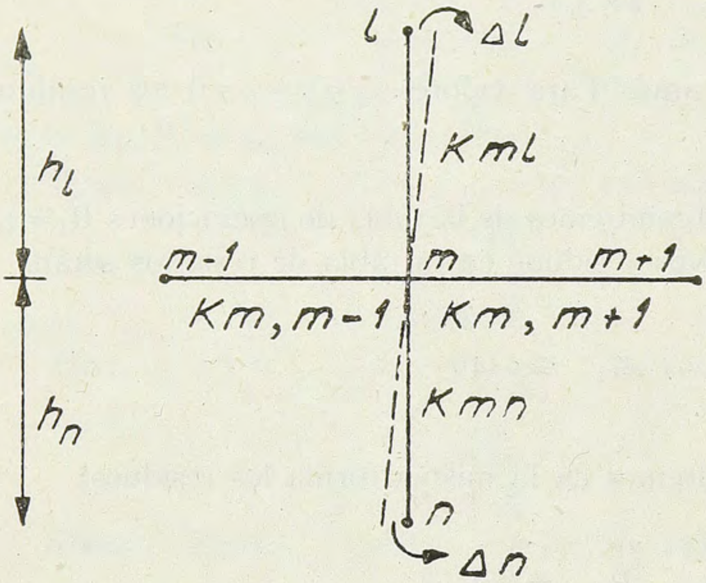
La principal ventaja de este método es que podremos hacer relajamientos en grupo (block relaxation) ya que simultáneamente podremos dar valores a x, y, z. Así al resolver el problema anterior podremos observar en la tabla de residuos que: $R_2=-35$ es más o menos dos veces $R_1=-17$ y que $R_3=-51$ es 3 veces $R_1=-17$ por lo tanto el problema podríamos resolverlo así:

x	y	y	R_1	R_2	R_3
0	0	0	—17	—35	—51
1	2	3	0	0	0

La segunda ventaja del método de relajamientos es que no es un procedimiento mecánico. Aquí el calculista va a poder usar juicios propios y juicios más exactos mientras más experiencia tenga en este método. Así, como veremos en seguida, las rotaciones y desplazamientos de los nudos en las estructuras, pueden ser juzgados aproximadamente de antemano sabiendo hacer un análisis de la tabla de operaciones y de la tabla de residuos y por lo tanto acelerar la convergencia y llegar a obtener rápidamente valores cero en los residuos.

Apliquemos ahora este método a los marcos rígidos y para esto vamos a hacer uso primeramente de las ecuaciones de Slope-Deflection.

Conviene hacer algunas transformaciones a las ecuaciones de Slope-Deflection para hacer así más fácil la aplicación del método en cuestión. Separemos de una estructura cualesquiera el trozo mostrado en la figura.



Sean Δl y Δn los desplazamientos horizontales de los nudos l y n respectivamente.

Sean hl y hn las longitudes de los miembros ml y mn.

Supongamos que no hay cargas aplicadas en estos miembros.

Y tendremos:

$$M_{m,m+1} = 2\,E\,K_{m,m+1}\,(2\Theta_m+\Theta_{m+1})$$

$$M_{m-1,m} = 2\,E\,K_{m-1,m}\,(2\Theta_m+\Theta_{m-1})$$

$$M_{ml} = 2\,E\,K_{ml}\left(2\Theta_m+\Theta_l-3\,\frac{\Delta l}{h_l}\right)$$

$$M_{mn} = 2\,E\,K_{mn}\left(2\Theta_m+\Theta_n-3\,\frac{\Delta n}{h_n}\right)$$

$$\Sigma M = 0$$

De aquí tendremos: $2\,(\Sigma K_m)\,E\Theta_m+K_{m,m+1}\,\Theta_{m+1}+K_{m-1,m}\,\Theta_{m-1}+K_{ml}\Theta_l$

$$+K_{mn}\Theta_n-3\,K_{ml}\frac{E\,\Delta l}{h_l}-3\,K_{mn}\frac{E\,\Delta n}{h_n}=0 \qquad (1)$$

en que $\Sigma K_m = K_{m,m+1} + K_{mn} + K_{ml} + K_{m,m-1}$

Además tendremos,

llamando a V_l al esfuerzo de corte de la columna ml:

$$M_{ml} + M_{lm} = V_l h_l$$

O sea

$$2\,EK_{ml}\left(2\Theta_l+\Theta_m-3\frac{\Delta l}{h_l}\right)+2\,EK_{ml}\left(2\Theta_m+\Theta_l-3\frac{\Delta l}{h_l}\right)=V_l h_l$$

O sea

$$K_{ml}\,E\Theta_m+K_{ml}\,E\Theta_n-2\,K_{ml}\frac{E\,\Delta l}{h_l}=\frac{V_l h_l}{6} \qquad (2)$$

Con ayuda de las ecuaciones (1) y (2) se puede construir muy fácilmente la tabla de operaciones sin necesidad de establecer todas las ecuaciones de Slope-Deflection.

Así para el ejemplo que vamos a calcular en seguida, vemos que la tabla de operaciones se construye automáticamente así.

	R_1	R_2	R_3	R_4	$R\triangle_1$	$R\triangle_2$
$E\Theta_1=1$	$2\Sigma K_1$	K_{12}	K_{13}		K_{13}	
$E\Theta_2=1$	K_{12}	$2\Sigma K_2$		K_{24}	K_{24}	
$E\Theta_3=1$	K_{13}		$2\Sigma K_3$	K_{34}	K_{13}	K_{35}
$E\Theta_4=1$		K_{24}	K_{34}	$2\Sigma K_4$	K_{24}	K_{46}
$E\dfrac{\triangle_1}{h_1}=1$	$-3K_{13}$	$-3K_{24}$	$-3K_{13}$	$-3K_{24}$	$-2(K_{13}+K_{24})$	
$E\dfrac{\triangle_2}{h_2}=1$			$-3K_{35}$	$-3K_{46}$		$-2(K_{35}+K_{46})$

Se ve que para $E\Theta_1=0$ le corresponde un residuo de $R_1=2\Sigma K_1$, para $E\Theta_2=1$, un residuo de $R_2=2\Sigma K_2$, etc.

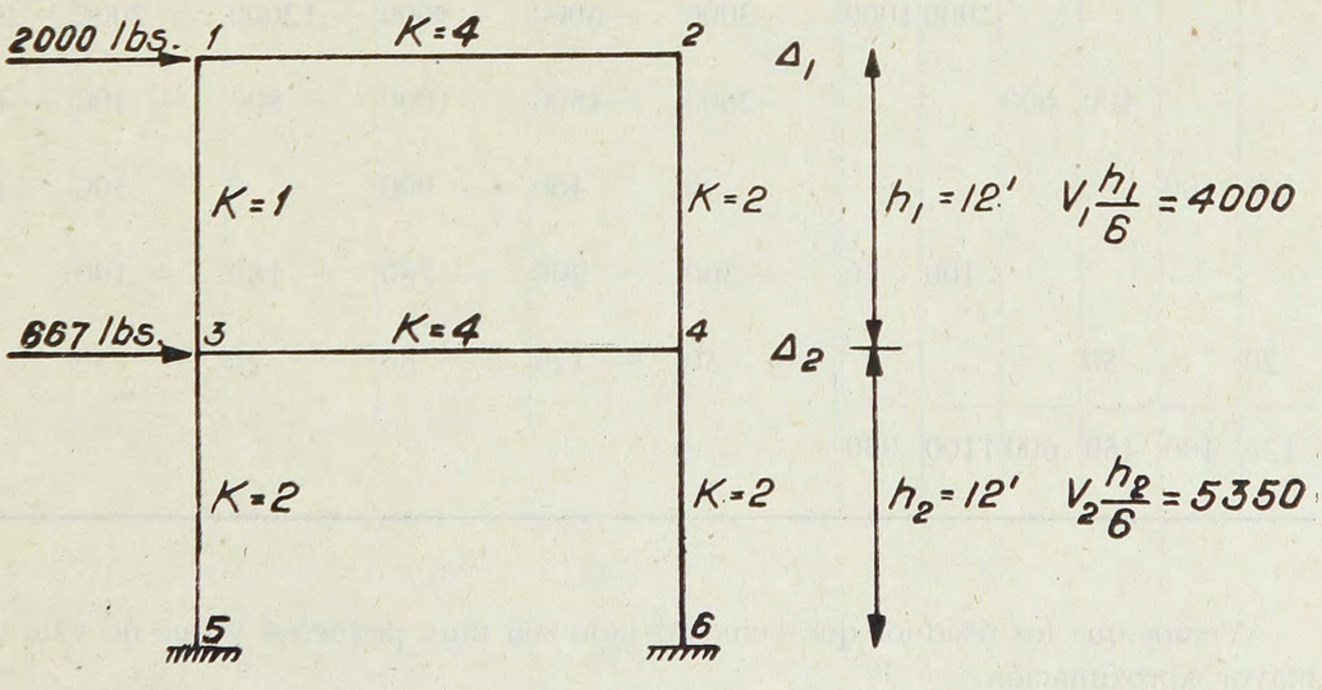
Y que para $E\Theta_1=1$ le corresponde un residuo $R_2=K_{12}$, $R_3=K_{13}$ es decir iguales a los valores K de las barras que concurren al nudo 1. Y así lo mismo para los demás nudos.

En cuanto a los residuos correspondientes a los $E\dfrac{\triangle}{h}$ se puede decir algo similar.

O sea en cualquier problema de marcos rígidos podremos construir la tabla de operaciones inmediatamente sin necesidad de establecer ecuaciones previas y bastando solamente memorizar los diferentes tipos de residuos, cosa bastante sencilla.

Ejemplo:

Apliquemos el método al ejemplo de la página 156 del libro de Grinter.



La tabla de operaciones será:

	R_1	R_2	R_3	R_4	$R\,\triangle_1$	$R\,\triangle_2$
$E\Theta_1 = 1$	10	4	1		1	
$E\Theta_2 = 1$	4	12		2	2	
$E\Theta_3 = 1$	1		14	4	1	2
$E\Theta_4 = 1$		2	4	16	2	2
$E\frac{\triangle_1}{h_1} = 1$	—3	—6	—3	—6	—6	
$E\frac{\triangle_2}{h_2} = 1$			—6	—6		—8

La tabla de residuos será:

$E\Theta_1$	$E\Theta_2$	$E\Theta_3$	$E\Theta_4$	$E\frac{\triangle_1}{h_1}$	$E\frac{\triangle_2}{h_2}$	R_1	R_2	R_3	R_4	$R\,\triangle_1$	$E\,\triangle_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4000	5350
				1000	1000	—3000	—6000	—9000	—12000	—2000	—2650
		400	600			—2600	—4800	—1000	— 800	— 400	— 650
100	400					0	400	— 900	0	500	— 650
				100	—70	— 300	— 200	— 780	— 180	— 100	90
20		50				— 50	— 120	— 60	20	— 30	10
120	400	450	600	1100	930						

Vemos que los residuos que hemos dejado son muy pequeños y que no vale una mayor aproximación.

Por lo tanto:

M_{13}	$= 2\,(240 + 450 - 3300)$	$= -5220$	lb pies
M_{12}	$= 8\,(240 + 400)$	$= 5120$	»
M_{21}	$= 8\,(800 + 120)$	$= 7360$	»
M_{24}	$= 4\,(800 + 600 - 3300)$	$= -7600$	»
M_{31}	$= 2\,(900 + 1200 - 3300)$	$= -4560$	»
M_{34}	$= 8\,(900 + 600)$	$= 12000$	»
M_{35}	$= 4\,(900 - 2790)$	$= -7560$	»
M_{42}	$= 4\,(1200 + 400 - 3300)$	$= -6800$	»
M_{43}	$= 8\,(1200 + 450)$	$= 13200$	»
M_{46}	$= 4\,(1200 - 2790)$	$= -6360$	»

(*Continuará*).

J. del R. B.
