Ing. Arturo Quintana Aylwin

Determinación de la ecuación de curvas de descarga en cauces naturales

La determinación de la ecuación de la curva de descarga de un curso natural sometido a control limnimétrico es un punto de la más alta importancia para la correcta formación de su estadística pluviométrica.

Un aforo o medida del gasto del cauce natural es una operación laboriosa, que no puede realizarse día a día para formar la estadística con sus resultados directos. Por este motivo, se somete a observación el estado del nivel del agua en el cauce, lo que es fácil de realizar mediante observadores que anoten, con cierta periodicidad preestablecida, las lecturas en una regla limnimétrica vertical fija, parcialmente sumergida en el agua, o mediante inscripción continua en un registro gráfico especial.

Si las condiciones del cauce, en la zona en que se ha instalado la sección limnimétrica, son estables y no son de temer alteraciones de la forma o dimensiones del lecho, debe existir una función

$$Q = f\ (h) \tag{1}$$

que relacione el gasto Q del cauce con el nivel superficial del agua en esa sección, definido por la lectura h de la regla limnimétrica.

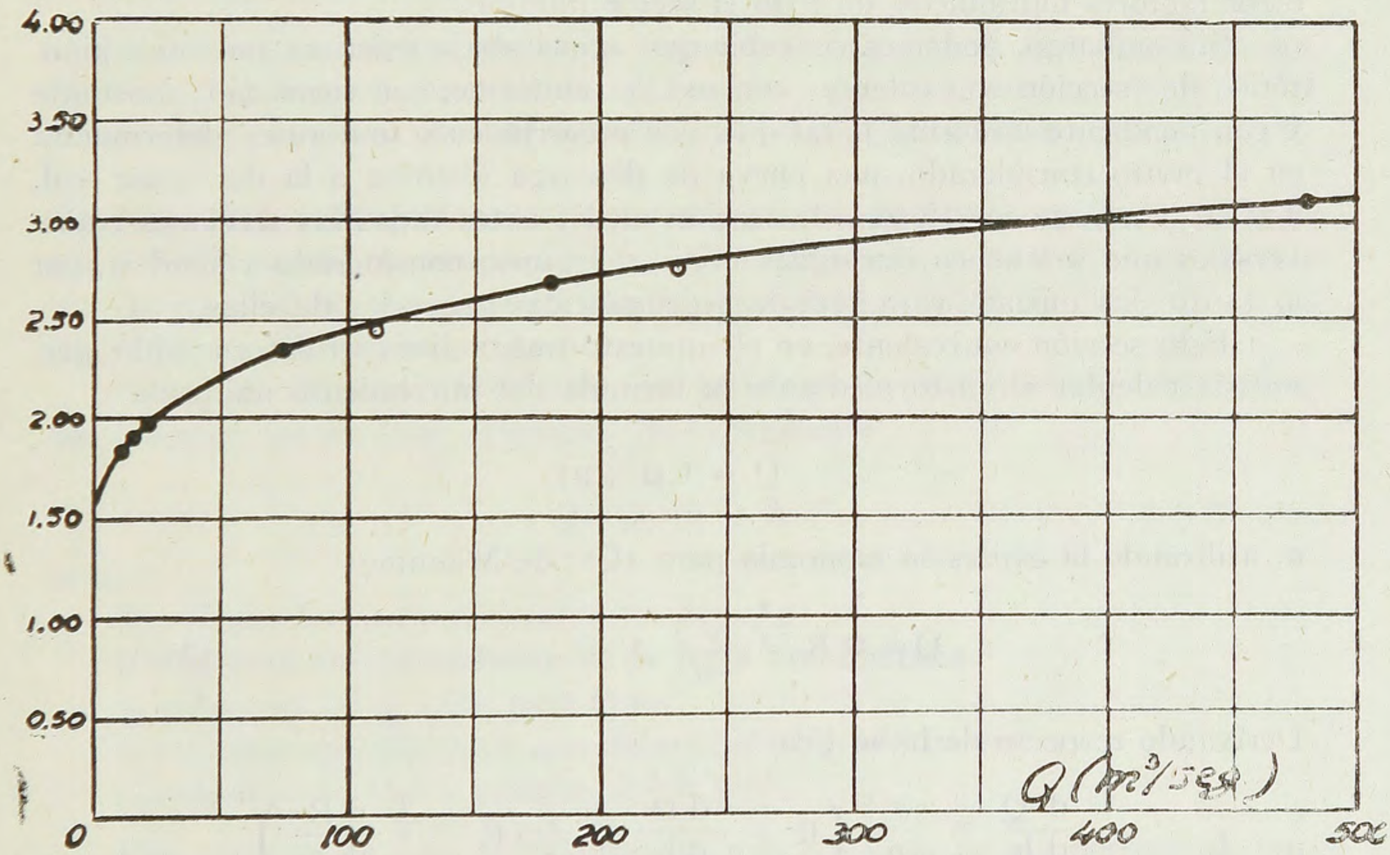
Para establecer la naturaleza, constantes y coeficientes de dicha función, es necesario practicar aforos aislados, para diferentes valores del gasto, relacionando cada uno de ellos con su correspondiente lectura limnimétrica. Estos aforos, en lo posible, deben practicarse para diferentes estados del nivel o del gasto en forma de cubrir espaciadamente toda la zona del fenómeno comprendida entre sus máximos y mínimos de ocurrencia frecuente. Después de un cierto plazo en que el cauce ha sido sometido periódicamente a medidas del gasto, se tendrá un cuadro estadístico conteniendo n valores de Q, con sus correspondientes de h.

Como ilustración se incluye a continuación un cuadro de este tipo correspondiente a la estación limnimétrica del río Mataquito en El Morrillo, controlada por Endesa.

Aforo	h mts	Q m³|seg
N.º 28	1.99	21.4
29	1.90	14.6
30	1.84	11.5
31	3.09	479.5
32	2.74	230.0
33	2.44	109.4
34	2.35	74.4
35	2.68	180.7

Los valores de este cuadro se han inscrito además en el gráfico N.º 1, en que se ha llevado en abscisas la variable dependiente Q y en ordenadas la variable independiente h. A título ilustrativo y sin mayores pretensiones de fidelidad, se ha trazado una curva suavizadora para indicar en primera inspección la naturaleza de la función

Fig. N.º 1



Sección Limnimétrica: Mataquito en "El Morrillo"

Para intentar una interpretación de una curva de este tipo mediante una expresión analítica, aunque sea de carácter empírico, es necesario, previamente, establecer qué condiciones debe ésta satisfacer.

Las condiciones básicas de toda curva de descarga son dos:

a) **Que Q sea creciente con h.** Como consecuencia que a cada valor de h corresponda un solo valor de Q. Esta condición se verifica ordinariamente en todos los cauces naturales. Es posible que en algunos casos de cauces con barrancos volados o abovedados, o en zonas con terrenos de inundación, pueda ocurrir que un mismo valor de Q, determine valores distintos de h según que este gasto haya sido alcanzado en variación creciente o decreciente. Pero, las zonas de un cauce sujetas a tales contingencias no deben ser utilizadas para establecer en ellas secciones de aforos o limnimétricas. En todas las secciones controladas en Chile, ya sea por el Departamento de Riego o por Endesa, no hay noticias que una curva de descarga haya mostrado tendencia a decrecer al aumentar el nivel del agua.

b) **Debe ser tangencial al eje de las h.** El escurrimiento a lo largo de un cauce natural, suponiendo un gasto constante o lentamente variable a lo largo del tiempo, es un caso típico de movimiento permanente variado, ya que las secciones transversales a lo largo del cauce, van variando en forma más o menos irregular. En esta forma el eje hidráulico para cualquier gasto, es el resultado de una curva de remanso indefinida que, en el caso corriente del escurrimiento en río, depende de las condiciones geométricas y de rugosidad u otros factores hidráulicos, de todo el sector inferior.

Sin embargo, podemos concebir que aguas abajo existiera un cauce hipotético de «sección equivalente» con sección uniforme, con rugosidad constante y con pendiente uniforme J, tal que, con escurrimiento uniforme, determinara en el punto considerado, una curva de descarga idéntica a la del cauce real. Tal sección sería una forma de sección media entre todas las secciones transversales que se encuentran aguas abajo del punto considerado y tendría, por lo tanto, las mismas características geométricas generales de ellas.

Esta sección equivalente, en el supuestó que pudiera ser determinada, permitiría calcular el gasto mediante la fórmula del movimiento uniforme:

$$Q = C\Omega \sqrt{RJ}$$

o, utilizando la expresión monomia para «C», de Manning:

$$Q = \Omega R^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{J}}{n} \qquad (2)$$

Derivando respecto de h, se tiene:

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{\sqrt{J}}{n}\left(R^{\frac{2}{3}} \frac{d\Omega}{dh} + \frac{2}{3}\Omega R^{-\frac{1}{3}} \frac{dR}{dh}\right)$$

o bien

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{\sqrt{J}}{n}\left(R^{\frac{2}{3}} \frac{d\Omega}{dh} + \frac{2}{3}\psi R^{\frac{2}{3}} \frac{dR}{dh}\right) \qquad (3)$$

Si medimos los valores de h desde el punto más bajo de la sección equivalente, y consideramos el caso en que h→o, se vé fácilmente que el valor de R tiende a cero y ψ o bien a cero o a un valor finito.

En cuanto al valor $\frac{d\Omega}{dh}$, es el ancho superficial que también tiende a cero.

Finalmente respecto del valor, $\frac{dR}{dh}$ cabe observar que debe ser siempre un número finito. En el caso de lechos rectangulares y trapeciales, por ejemplo, $\frac{dR}{dh}$ tiende a la unidad; en el caso de lechos parabólicos tiende a $\frac{2}{3}$

En el caso de los lechos triangulares se tiene en general:

$$\frac{dR}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{K^2} + \frac{1}{4}}}$$

siendo K la razón $\frac{b}{h}$. Al variar K entre sus límites extremos cero e infinito, el valor $\frac{dR}{dh}$ varía entre cero y la unidad.

La sección equivalente debe ser intermedia entre algunos de los casos considerados; por lo tanto $\frac{dR}{dh}$ debe quedar comprendido entre cero y la unidad, o sea debe ser finito.

Se puede ver fácilmente que $\frac{dQ}{dh}$ tiende a cero cuando h tiende a cero, lo que demuestra nuestra condición respecto de la curva de descarga del cauce hipotético de sección equivalente, y también, por consiguiente, respecto del cauce real, ya que su curva de descarga es idéntica con aquélla.

Ecuaciones empíricas.—El problema consiste ahora en la elección de una función empírica para representar Q que cumpla con las dos condiciones anteriores, a saber: ser creciente con h, y ser tangencial al eje de las h en un punto h_o correspondiente a Q = o.

Entre las diferentes funciones que satisfacen las condiciones enunciadas, nos proponemos analizar el empleo de la siguiente:

$$Q = Q_o\ (h - h_o)^m \qquad (4)$$

en que:

Q = Gasto del cauce natural
h = Lectura correspondiente de la regla limnimétrica
h_o = Lectura en la regla para Q = o
m = Exponente numérico que determina el grado de curva
Q_o = Gasto del cauce cuando $(h - h_o) = 1$.

Una función de este tipo representa una parábola de eje horizontal, tangente al eje de las h para $h = h_o$ y con grado m.

Para cada sección limnimétrica, las incógnitas que sería necesario determinar, son los valores de Q_o, h_o y m.

Para esto se dispone de n ecuaciones de observación:

$$\left.\begin{array}{l} Q_o(h_1 - h_o)^m = Q_1 \\ Q_o(h_2 - h_o)^m = Q_2 \\ \vdots \\ Q_o(h_n - h_o)^m = Q_n \end{array}\right| \qquad (5)$$

Aquí los valores de h y Q son valores observados, y por lo tanto, valores numéricamente conocidos. Ahora bien, los valores que la ecuación (4) arroje para Q cuando sea conocido h, van a depender de los valores que se obtengan para Q_o, h_o y m, o sea:

$$f(Q_o,\ h_o,\ m) = Q \tag{6}$$

siendo, como se ha dicho, Q_o, h_o y m las incógnitas del problema.

Como las ecuaciones (5), que permitirían determinarlas, no son lineales, no es posible recurrir directamente al método de las ecuaciones normales de Gauss para obtener sus valores más probables.

Debemos, por lo tanto, utilizar los métodos diferenciales, mediante aproximación previa.

Sean Q'_o, h'_o y m' soluciones aproximadas de Q_o, h_o y m respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} Q_o = Q'_o + \Delta Q_o \\ h_o = h'_o + \Delta h_o \\ m = m' + \Delta m \end{array}\right| \tag{7}$$

ΔQ_o, Δh_o, y Δm representan las correcciones aplicables a los valores aproximados respectivos, para obtener las soluciones más probables.

Reemplazando (7) en (6), se tiene:

$$f(Q'_o + \Delta Q_o, h'_o + \Delta h_o,\ m' + \Delta m) = Q$$

Desarrollando en serie de Taylor y aceptando que los términos correctivos sean suficientemente pequeños para hacer despreciable los términos de segundo orden, resulta:

$$f(Q'_o,\ h'_o,\ m') + \frac{\delta f}{\delta Q_o}\ \Delta\ Q_o + \frac{\delta f}{\delta h_o}\ \Delta\ h_o + \frac{\delta f}{\delta m}\ \Delta m = Q$$

sea:

$$f(Q_o',\ h'_o,\ m') = Q'$$

Q' es el valor numérico obtenido para Q, cuando dado un valor de h, se calcula con la ecuación aproximada:

$$Q' = Q'_o(h - h'_o)^{m'}$$

Luego en general:

$$\frac{\delta f}{\delta Q_o}\ \Delta\ Q_o + \frac{\delta f}{\delta h_o}\ \Delta\ h_o + \frac{\delta f}{\delta m}\ \Delta m = Q - Q' = \Delta Q \tag{8}$$

En este caso, ΔQ representa para cada aforo, la corrección que habría que aplicar al valor Q' calculado con la ecuación aproximada, para obtener el valor observado.

Las derivadas parciales tienen, para nuestro caso, las siguientes expresiones generales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta Q_o} &= (h-h'_o)^{m'} &&= A \\ \frac{\delta f}{\delta h_o} &= -\ m'Q'_o\ (h-h'_o)^{m'-1} &&= B \\ \frac{\delta f}{\delta m} &= Q'_o(h-h'_o)^{m'}L(h-h'_o) = Q'L(h-h'_o) &&= C \end{aligned}\right| \quad (9)$$

Naturalmente, para cada ecuación de observación, tienen valores numéricos diferentes; pero siendo en todo caso coeficientes numéricos del sistema de n ecuaciones lineales entre las incógnitas $\triangle Q_o$, $\triangle h_o$ y $\triangle m$.

El sistema resultante será:

$$\left.\begin{aligned} A_1 \triangle Q_o + B_1 \triangle h_o + C_1 \triangle m &= \triangle Q_1 \\ A_2 \triangle Q_o + B_2 \triangle h_o + C_2 \triangle m &= \triangle Q_2 \\ &\vdots \\ A_n \triangle Q_o + B_n \triangle h_o + C_n \triangle m &= \triangle Q_n \end{aligned}\right| \quad (10)$$

Este sistema de n ecuaciones entre tres incógnitas ($n > 3$), permite determinar, mediante las ecuaciones normales de Gauss, los valores más probables de las incógnitas, utilizando el principio de aplicación general en Teoría de los Errores:

$$\Sigma p v^2 = \min. \quad (11)$$

siendo v los residuos, o sean las diferencias entre los valores de $\triangle Q$ y los calculados en el primer miembro de (10) con los valores más probables de las incógnitas; p son los pesos de las diferentes observaciones.

Se sabe que, en general, existe la siguiente relación entre los pesos p de las observaciones y sus respectivos errores probables r:

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} : \cdots : \frac{1}{r_n^2}$$

Aceptando que el error probable de un aforo sea proporcional al valor del gasto, se tendrá:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \cdots = \frac{1}{Q_1^2} : \frac{1}{Q_2^2} : \frac{1}{Q_3^2} : \cdots \quad (12)$$

El principio de los mínimos cuadrados puede expresarse entonces así:

$$\sum \left(\frac{A \triangle Q_o + B \triangle h_o + C \triangle m - \triangle Q}{Q'} \right)^2 = \min \quad (13)$$

expresión idéntica a la que resultaría de sustituir las ecuaciones (10) por las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_1}{Q'_1} \triangle Q_o + \frac{B_1}{Q'_1} \triangle h_o + \frac{C_1}{Q'_1} \triangle m &= \frac{\triangle Q_1}{Q'_1} \\ \frac{A_2}{Q'_2} \triangle Q_o + \frac{B_2}{Q'_2} \triangle h_o + \frac{C_2}{Q'_2} \triangle m &= \frac{\triangle Q_2}{Q'_2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\qquad \vdots \end{aligned}\right| \quad (14)$$

o simplemente:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \Delta Q_o + b_1 \Delta h_o + c_1 \Delta m = K_1 \\ a_2 \Delta Q_o + b_2 \Delta h_o + c_2 \Delta m = K_2 \\ \quad \vdots \\ a_n \Delta Q_o + b_n \Delta h_o + c_n \Delta m = K_n \end{array}\right| \qquad (15)$$

siendo

$$a = \frac{A}{Q'} = \frac{1}{Q'_o}$$

$$b = \frac{B}{Q'} = \frac{m'}{h-h'_o}$$

$$c = \frac{C}{Q'} = L(h-h'_o) \qquad (16)$$

$$K = \frac{\Delta Q}{Q'} = \frac{\Delta Q}{Q'}$$

Las ecuaciones normales correspondientes son por lo tanto:

$$\begin{array}{l} [a^2]\Delta Q_o + [a\,b]\,\Delta h_o + [a\,c]\,\Delta m = [a\,k] \\ [a\,b]\,\Delta Q_o + [b^2]\,\Delta h_o + [b\,c]\,\Delta m = [b\,k] \\ [a\,c]\,\Delta Q_o + [b\,c]\,\Delta h_o + [c^2]\,\Delta m = [c\,k] \end{array} \qquad (17)$$

cuya resolución permitirá calcular los valores más probables de las correcciones ΔQ_o, Δh_o y Δm.

Aplicación del método.—La aplicación del método tiene las siguientes etapas:

a) **Determinación de valores aproximados** Q'_o, h'_o **y** m'.—Este es un problema previo que puede resolverse con ayuda de gráfico.

Sea la ecuación (4)

$$Q = Q_o(h-h_o)^m$$

Aplicando logaritmos:

$$\text{Log } Q = \text{Log } Q_o + m \text{ Log } (h-h_o) \qquad (18)$$

Esta ecuación indica que las expresiones Log Q y Log $(h-h_o)$ satisfacen una recta, lo cual sería efectivo en el caso de conocerse h_o. En este caso, al llevar los valores de Q y h en un gráfico Log-Log, los puntos obtenidos deberían quedar colocados a lo largo de una recta, que permitiría determinar a Q_o y m. En efecto Q_o, quedaría determinado por la intersección de dicha recta con $(h-h_o)=1$. El valor de m se deduce fácilmente del coeficiente angular de dicha recta.

Como h_o no es en realidad conocido, se le adopta como parámetro y se le dan varios valores de tanteo, construyéndose para cada una el gráfico Log-Log correspondiente.

Cuando se adopta para el parámetro h_o un valor distinto del verdadero, resulta, en lugar de una recta, una curva. El sentido de la curvatura depende de si el valor de tanteo es mayor o menor que el verdadero.

En el gráfico N.° 2, aparecen las aproximaciones gráficas practicadas para el caso del río Mataquito en El Morrillo. De este estudio resulta que el valor $h'_o = 0.90$ mts. satisface bastante bien la ecuación de una recta, lo que permite leer con la correspondiente recta suavizadora $Q'_o = 14.7$. El valor de m' resulta ser 4.45.

La expresión aproximada de la ecuación de la curva de descarga es por lo tanto:

$$Q = 14.7\,(h - 0.90)^{4.45} \qquad (19)$$

b) **Determinación de los términos correctivos ΔQ_o, Δh_o y** Δm.— De aquí en adelante el procedimiento es totalmente analítico de acuerdo con la teoría expuesta en este estudio, pero su cálculo numérico se desarrolla en forma de cuadros.

Como aplicación indicamos los cálculos correspondientes a la estación del río Mataquito en El Morillo antes mencionada con los siguientes valores aproximados:

$$Q'_o = 14.7$$
$$h'_o = 0.90$$
$$m' = 4.45$$

Aforo	h	Q	$h - h'_o$	Q'	ΔQ	$K = \frac{\Delta Q}{Q'}$
28	1.99	21.4	1.09	21.57	—0.17	—0.00792
29	1.90	14.6	1.00	14.70	— 0.10	—0.00680
30	1.84	11.5	0.94	11.16	— 0.34	+0.03029
31	3.09	479.5	2.19	481.16	— 1.66	—0.00346
32	2.74	230.0	1.84	221.70	8.30	+0.03746
33	2.44	109.4	1.54	100.41	8.99	+0.08951
34	2.35	74.4	1.45	76.81	— 2.41	—0.03134
35	2.68	180.7	1.78	191.29	—10.59	—0.05535

Aforo	$a = \frac{1}{14.7}$	$b = -\frac{m}{h - h'o}$	$c = L(h - h'o)$
28	0.06803	—4.08257	0.08618
29	»	—4.45000	0.00000
30	»	—4.73404	0.06188
31	»	—2.03196	0.78390
32	»	—2.41848	0.60977
33	»	—2.88961	0.43178
34	»	—3.06897	0.37156
35		—2.50000	0.57661

$[a^2] = +\Delta 0.03702$ $\qquad$ $[aK] = 0.00356$

$[b^2] = +92.87734$ $\qquad$ $[bK] = -0.18848$

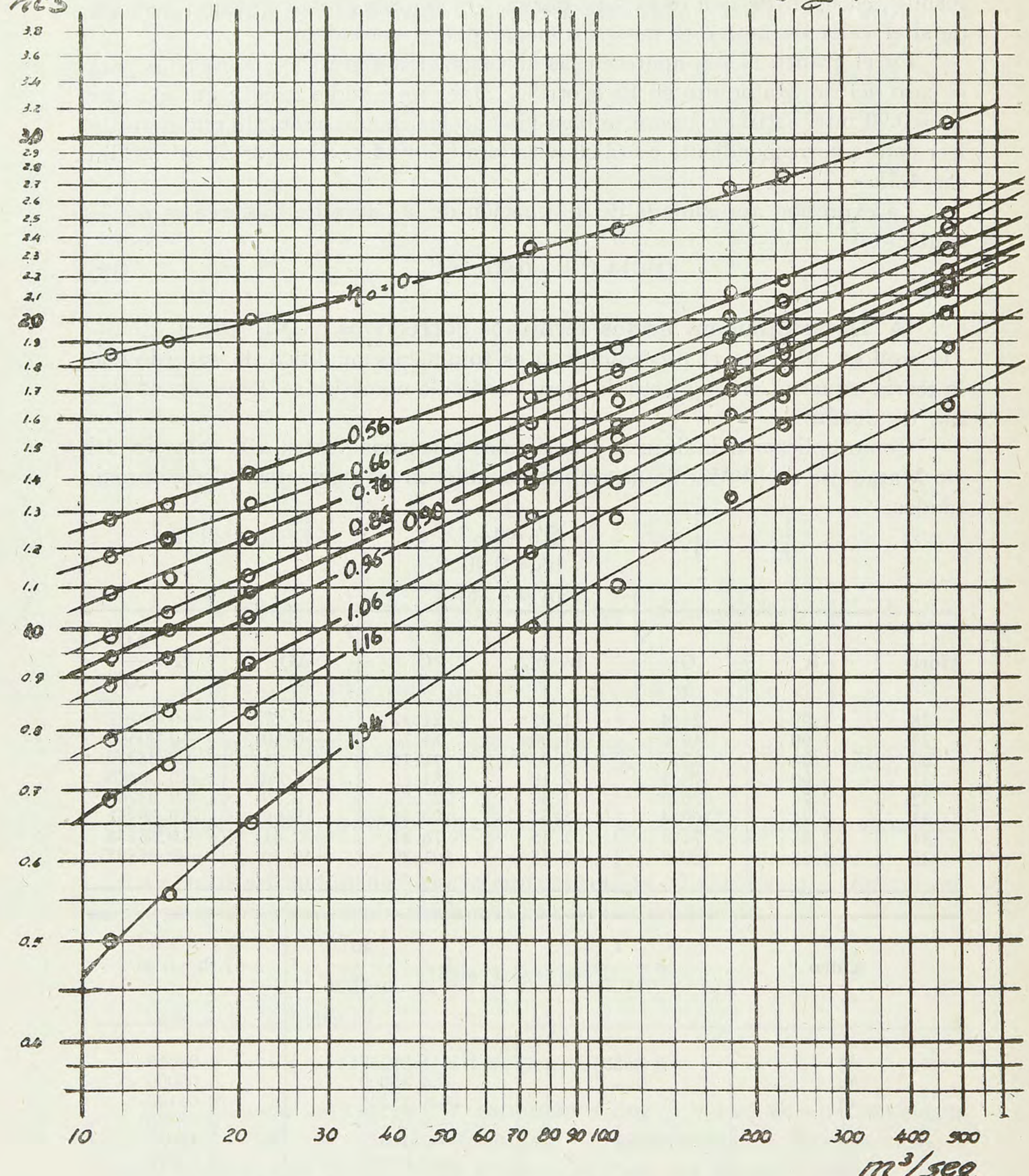
$[c^2] = +1.65455$ $\qquad$ $[cK] = +0.01266$

$[ab] = -1.78066$ $\qquad$ $[bc] = -6.95600$

$[ac] = +0.19034$

Grafico Log-Log: (Fragmento)

Fig. N° 2.



Sección Limnimétrica: Mataquito en "El Morrillo".

Los anteriores son los coeficientes numéricos de las ecuaciones (17), cuya resolución arroja los siguientes resultados:

$\triangle Q_o = 1.243$

$\triangle h_o = 0.017$

$\triangle m = -0.064$

Por consiguiente la expresión definitiva de la ecuación de la curva de descarga del río Mataquito en El Morillo es:

$$Q = 15.943(h - 0.917)^{4.386}$$

A. Q. A.