ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

S U M A R I O

SEPTIEMBRE

OCTUBRE

N.os 9 - 10

AÑO LIX

SANTIAGO DE CHILE

Ing. Germán Gamm Martin

Fórmula general para cañerías

Desde hace un siglo queda discutida la fórmula para calcular la pérdida de presión en cañerías, y encontramos en la literatura un sinnúmero de diferentes indicaciones, todas estas basadas en la ecuación general:

$$\Delta H = \lambda \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{L}{D} \qquad (1)$$

en la cual significa:

ΔH = pérdida de presión en metros columna del líquido.
U = velocidad en m/seg.
g = aceleración de gravedad en m/seg^2.
D = diámetro de la cañería en metros.
L = longitud de la cañería en metros.
λ = coeficiente variable.

Las investigaciones intentaban determinar la función λ para la cual tenemos fórmulas muy variadas.

Siguiendo el orden histórico, que a la vez demuestra la evolución de los conceptos, encontramos entre otras:

Año 1775 Chezy $\lambda = 0{,}03$ (constante)

Año 1855 Weissbach $\lambda = 0{,}0144 + 0{,}00947 \frac{1}{\sqrt{U}}$ (función de la velocidad)

Año 1857 Darcy $\lambda = 0{,}01989 + \frac{0{,}00050}{D}$ (función del diámetro)

Año 1905 Lang $\lambda = a + \frac{0{,}018}{\sqrt{UD}}$

siendo a una variable según la rugosidad de la superficie, esta fórmula establece el valor de λ como dependiendo del material, de la velocidad y del diámetro, concepto que se ha mantenido hasta hoy.

Desde entonces los experimentos se proponían buscar los factores y exponentes en relación con los materiales, el diámetro y la velocidad, basándose en la ecuación general.

$$I = C \cdot \frac{U^x}{D^y} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \qquad (2)$$

La última publicación al respecto la encontramos en los Anales del Instituto de Ingenieros de Chile, tomo Julio-Agosto del año 1945, en la cual el autor señor Ing. don Oscar Anwandter S. establece la fórmula

$$I = \frac{\gamma}{R_e^{0,2}} \cdot \frac{U^2}{gD} \cdot \left(\frac{D}{K}\right)^m \qquad (3)$$

siendo:

I = pérdida de presión por unidad de longitud de la cañería

$R_e = \frac{UD}{\nu}$ = número de Reynolds (ν = viscosidad).

K = δ k , δ = factor numérico según el material.

k = altura media de la rugosidad

γ ν m = variables según el número de Reynolds.

El señor Anwandter indica en una tabla los valores de γ y m para los regímenes correspondientes a $R_e = 2{,}5 \cdot 10^3$ hasta $R_e = 10^7$.

Analizando estos valores — tabla 1) y diagrama fig. 1) — llegamos a la conclusión de que podemos expresar estas variables como funciones analíticas en las siguientes formas:

$$\gamma = \frac{R_e^{0,300}}{126} \qquad (4)$$

$$m = 0{,}0510 \ {}^{10}\!\operatorname{Log} \frac{R_e}{1896} \qquad (5)$$

Una ecuación de la forma $m = a \operatorname{Log} \frac{R_e}{R_o}$

se puede transformar en $\frac{b}{a} \cdot m = b \cdot \operatorname{Log} \frac{R_e}{R_o}$

obteniéndose así la igualdad

$$\left(10^{\frac{b}{a}}\right)^m = \left(\frac{R_e}{R_o}\right)^b \qquad (6)$$

Si elegimos b = 1,10 e introducimos las ecuaciones (4), (5) y (6) en la (3) amplificándola a la vez por los factores

$\left(\frac{R_e}{R_o}\right)^{1,10} \cdot \left(\frac{R_o}{R_e}\right)^{1,10} = 1$ y siendo $R_o = 1896$ obtenemos

$$I = \frac{1896^{1,10}}{126} \cdot \frac{1}{R_e} \cdot \frac{U^2}{gD} \left(\frac{R_e}{1896}\right)^{1,10} \cdot \left(\frac{D}{K}\right)^m \qquad (7)$$

con $\left(\frac{R_e}{1896}\right)^{1,10} = 10^{\frac{1,10}{0.0510} \cdot m} = 10^{21,56\, m}$ y $\frac{1896^{1,10}}{126} = 32$

obtenemos
$$I = \frac{32}{R_e} \cdot \frac{U^2}{gD} \cdot \left(10^{21,56} \cdot \frac{D}{K}\right)^m \tag{8}$$

introduciendo
$$\frac{10^{21,56}}{K} = \frac{36,3 \cdot 10^{20}}{K} = G$$

obtenemos la fórmula general

$$I = \frac{32}{R_e} \cdot \frac{U^2}{gD} \cdot (GD)^m \tag{9}$$

o si volvemos a la forma clásica

$$\triangle H = \frac{64}{R_e} \cdot (GD)^m \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{L}{D} \tag{10}$$

lo que corresponde a
$$\lambda = \frac{64}{R_e} \cdot (GD)^m \tag{11}$$

El segundo miembro de esta ecuación es el producto de dos expresiones, la primera $\frac{64}{R_e}$ es el valor de λ para el escurrimiento laminar, la segunda $(GD)^m$ con $G \cdot D = \frac{G}{\delta} \cdot \frac{D}{k}$ es un coeficiente relacionado con la rugosidad relativa $\frac{D}{k}$ llevado a la potencia m, función del número de Reynolds.

Para $R_e \leqq 1896$ dándose a m el valor O, obtenemos $\lambda = \frac{64}{R_e}$ ecuación clásica para el régimen laminar, siendo sin influencia la clase de material.

Para $R_e > 1896$ influye la rugosidad relativa por intermedio de la expresión $(GD)^m$.

Podía parecer extraño que el límite entre el régimen laminar y turbulento no sea el número crítico de Reynolds $R_e = 2320$. Al respecto es preciso recordar que este límite crítico solamente establece que al ser $R_e < 2320$ el escurrimiento tiende a estratificarse en caso de producirse una turbulencia, mientras que con $R_e > 2320$ el escurrimiento se mantiene turbulento una vez producida la turbulencia.

Por otra parte, es de interés constatar que el propio Reynolds ha hecho indicaciones en el sentido de que el límite entre el escurrimiento laminar y turbulento parece depender de la rugosidad relativa de la cañería, mencionando como valor inferior observado $R_e = 1920$, valor bastante acercado al de $R_e = 1896$ que aparece en la ecuación (5).

De todos modos parece lógico que al producirse una turbulencia en el escurrimiento con $R < 2320$, la pérdida de presión sea superior a la correspondiente al escurrimiento laminar, no perturbado.

La fórmula (9) explica también lo acertado del concepto de consultar en la fórmula (2) tanto el factor como los exponentes como variable según el material.

Considerando la igualdad:

$$(GD)^{a \cdot \lg \frac{Re}{Ro}} = \left(\frac{R_e}{R_o}\right)^{a \cdot \lg GD} = \left(\frac{R_e}{R_o}\right)^{P}$$

podemos transformar la fórmula (9) introduciendo $R_e = \dfrac{UD}{\gamma}$ y siendo $\gamma = 10^{-6}$

y g = 9,81 en: $$I = 3{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot 527^{P} \cdot \frac{U^{1+P}}{D^{2-P}} \qquad (12)$$

ecuación que puede ser transformada con $U = \dfrac{4Q}{\pi D^2}$ en:

$$I = \frac{4{,}16 \cdot 10^{-6} \cdot 672^{P}}{D^{4+P}} \cdot Q^{1+P} \qquad (13)$$

o, respectivamente, en

$$Q = (4{,}16 \cdot 10^{-6} \cdot 692^{P})^{-\frac{1}{1+P}} \cdot I^{\frac{1}{1+P}} \cdot D^{\frac{4+P}{1+P}} \qquad (14)$$

La fórmula (13) corresponde a la ecuación $I = \gamma \cdot Q^{n}$ (15) ecuación básica para la aplicación del procedimiento de Hardy Cross en los cálculos de la pérdida de carga en redes interconectadas. La fórmula (14) corresponde a la ecuación:

$$Q = C \cdot I^{x} \cdot D^{y} \qquad (16)$$

Suponiendo p = 0,9 correspondiendo a $\log^{10}$ GD = 17,63 obtenemos

$$Q = 30{,}6 \cdot I^{0{,}526} \cdot D^{2{,}579} \qquad (17)$$

ecuación que difiere de la fórmula de Scobey:

$$Q = 29 \cdot I^{0{,}526} \cdot D^{2{,}579} \qquad (18)$$

solamente en el valor del factor constante, coincidiendo los valores de los exponentes.

Sin embargo, es preciso recordar la diferencia de los conceptos. La fórmula (18) es indicada por Scobey para cañerías de fierro o acero, mientras que la fórmula (17) es válida para la rugosidad relativa determinada por

$$GD = \frac{C}{\delta} \cdot \frac{D}{k} = 10^{17{,}63}$$

En la tabla 2) se indican los valores de G calculados a base de los valores K indicados por el señor Anwandter. Los valores de esta tabla pueden considerarse sólo de carácter informativo, en vista de que los resultados obtenidos al aplicarlos coinciden con los obtenidos con otras fórmulas experimentadas solo en casos aislados —pero sí se amoldan a los obtenidos con la fórmula del señor Anwandter— en forma tal, que la pérdida de carga resulta inferior a la que normalmente consultan las demás fórmulas.

Por lo tanto, será indicado establecer los valores de G por medio de experimentos.

Para los cálculos hidráulicos será especialmente indicada la fórmula (10) transformada para agua de 20° C en:

$$\Delta H = 4{,}16 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{D^4} \cdot (GD)^m \cdot Q \cdot L \qquad (19)$$

Apareciendo ΔH como función lineal de Q, esta fórmula permite la aplicación del principio de la superposición en los cálculos hidráulicos, siempre que el valor resultante corresponda al número de Reynolds apreciado para la elección del exponente m. A base de este principio será posible establecer las pérdidas de carga en redes complicadas e interconectadas por medio de gráficos, lo que será demostrado oportunamente en otra publicación.

Resumen: En el presente trabajo se establece una fórmula general válida para todos los regímenes de escurrimiento.

Contiene dos variables, una dependiente de la rugosidad de la superficie interior de la cañería, otra del número de Reynolds. Las transformaciones matemáticas de la fórmula coinciden en sus características con las de las fórmulas usuales, estableciendo las constantes y los exponentes que intervienen en éstas como funciones analíticas de la rugosidad.

Para la aplicación de la nueva fórmula será conveniente verificar los valores del coeficiente relacionado con la rugosidad de los diferentes materiales por medio de experimentos.

Descripcion del Diagrama

En el eje horizontal están marcados los valores del número de Reynolds en escala logarítmica.

En el eje vertical están marcados los valores de λ —escala lineal al lado izquierdo— y los valores de m—escala lineal al lado derecho.

La línea interrumpida (— — —) corresponde a los valores de m según las indicaciones del señor Anwandter y es interpolada por la línea recta según formula (5).

Las líneas interrumpidas por puntos (—·—·—·—) corresponden a los valores de λ deducidos de la fórmula del señor Anwandter y calculados para $\frac{D}{K} = 10^{-3}$ y $\frac{D}{K} = 10^{-6}$, las que son interpoladas por las curvas lisas según la fórmula (11).

Además está trazada la curva $\lambda = \frac{64}{R_e}$ correspondiente al escurrimiento laminar.

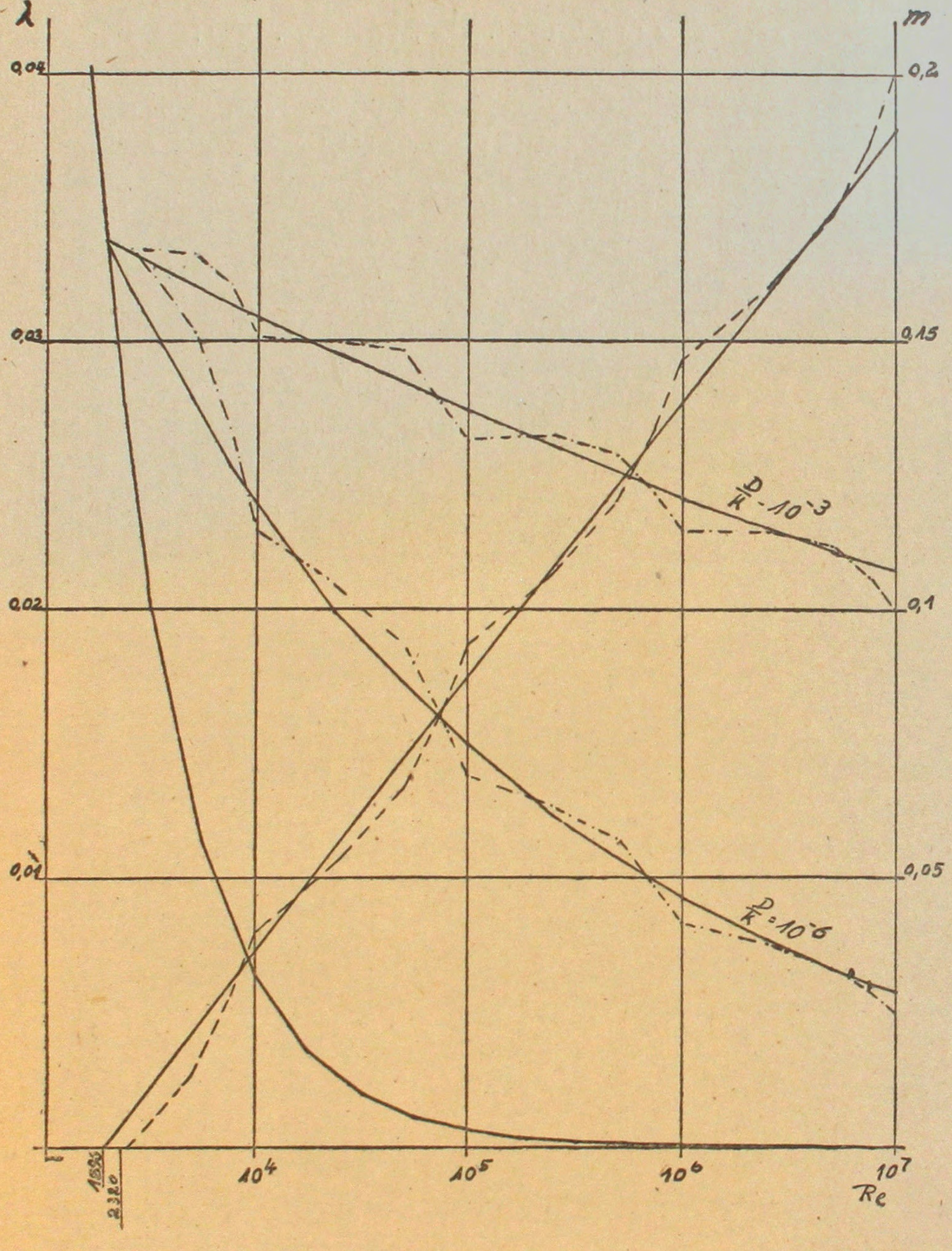
λ
m
0,04
0,03
0,02
0,01
0,2
0,15
0,1
0,05
$\frac{D}{k} = 10^{3}$
$\frac{D}{k} = 10^{6}$
1
1895
2320
10^4
10^5
10^6
10^7
Re

TABLA 1:

Re	γA	γ	m_A	m	Observación
1.896	——	0,076	0,0000	0,0000	laminar
2.320	——	0,082	0,0000	0,0045	Re crítico
$2{,}5 \cdot 10^3$	0,08	0,083	0,0000	0,0061	
$5\ 10^3$	0,10	0,102	0,0133	0,0210	
$7{,}5\ 10^3$	0,115	0,115	0,0267	0,0310	
10^4	0,125	0,126	0,0398	0,0368	
$2{,}5\ 10^4$	0,164	0,166	0,0534	0,0571	
$5\ 10^4$	0,204	0,204	0,0665	0,0720	
$7{,}5\ 10^4$	0,227	0,230	0,080	0,0820	
10^5	0,250	0,251	0,0932	0,0878	
$2{,}5\ 10^5$	0,331	0,330	0,1065	0,1081	
$5\ 10^5$	0,406	0,407	0,120	0,1230	
$7{,}5\ 10^5$	0,456	0,459	0,1335	0,1330	
10^6	0,500	0,501	0,1466	0,1388	
$2{,}5\ 10^6$	0,658	0,659	0,160	0,1591	
$5\ 10^6$.	0,81	0,812	0,1735	0,1740	
$7{,}5\ 10^6$	0,915	0,917	0,187	0,1840	
10^7	1,000	0,999	0,200	0,1898	

(γA, ma según Anwandter).

TABLA 2:

Valores de G calculados a base de los valores K indicados por el señor Anwandter.
G_0 = valor para cañería nueva
G_{25} = valor para cañería después de 25 años de uso.

TIPO DE CAÑERIA	G_0	G_{25} agua poco calcárea	G_{25} agua calcárea
FIERRO			
1) Cañerías remachadas totalmente con remachadura longitudinal y cubrejuntas remachadas con cabeza de remache sobresaliente.	91,6 19,2	330 a 69	609 a 127
1a) Palastros hasta 3|16" de espesor	19,2	69	127
1b) Planchas desde 3|16" hasta 7|16" de espesor, con junturas cónicas o cilíndricas	40	144	265
1c) Planchas desde ½" arriba, con junturas cónicas o cilíndricas y planchas de ¼" hasta 7|16" de espesor, con junturas de tope.	61,5	221	408
1d) Planchas de espesor superior a ½" con junturas lisas.	91,6	330	609
2) Cañerías con cubrejuntas remachadas, sin remachadura longitudinal	11	39,5	75,6
3) Cañería de enchufe y cordón, bridas, manguito exterior, en resumen sin remachaduras interiores sin ser absolutamente lisas	8,1	29	53,5
4) Madera — en dovelas	11		
5) Hormigón.			
5a) Tuberías usadas, elementos unidos a poco esmero	161	No influye la edad de la cañería, ni la clase de agua.	
5b) Unión cuidadosamente ejecutada	38		
5c) Tubos monolíticos ordinarios	14,6		
5d) Superficie interna lisa	11		
6) Asbesto.	8,1		