DISCUSION

DEL ARTICULO DE RAUL HUSID TITULADO

CALCULO DEL PERIODO FUNDAMENTAL DE VIBRACION DE EDIFICIOS CON RIGIDEZ DE CORTE*

por Mihail IFRIM y el AUTOR

Mihail IFRIM**

El estudio del Profesor Raúl Husid, acerca del cálculo del período fundamental de vibración de los edificios es muy importante debido a que la fórmula propuesta es fácil de aplicar y los resultados que se obtienen son mucho más que satisfactorios para los casos prácticos.

El autor de la presente nota ha establecido en algunos trabajos publicados anteriormente, una fórmula simple para el cálculo directo del período fundamental de vibración, que al aplicarla conduce a resultados casi iguales a los que se obtienen por los métodos exactos desde el punto de vista matemático[6,7,8,9].

La fórmula propuesta tiene un carácter general pudiendo ser utilizada en el caso de las estructuras con deformación sólo de flexión y también en el caso de las estructuras que se deforman solamente por efecto del esfuerzo de corte. De igual manera puede ser introducida en el cálculo con influencia simultánea de las deformaciones de flexión y de corte.

La influencia de las deformaciones se caracteriza por la rigidez relativa entre dos pisos consecutivos. En un trabajo del autor[9] han sido establecidas expresiones directas para el cálculo de las rigideces relativas correspondientes. Las rigideces relativas de cada piso gobiernan en modo más general el comportamiento de las estructuras en el régimen dinámico e intervienen directamente en la fórmula propuesta para el cálculo del período fundamental de vibración.

La fórmula dada por nosotros, ha sido establecida basándose en criterios energéticos y corregida teniendo en cuenta los errores que el método energético introduce en la precisión de los resultados: Estas correcciones han sido hechas después de un estudio sobre el intervalo de existencia de los valores exactos del período fundamental de vibración[7,8].

La aplicación de la fórmula es directa, la precisión es suficiente para los

---

*Revista IDIEM, vol 2, nº 2 (agosto 1963).pp. 91-106.

**Ingeniero de estructuras. Conferenciante universitario del Instituto de Construcción de Bucarest, Rumania. (Dirección: Instituto de Mecánica Aplicada de la Academia Romana, Calle C. Mille, nº 15, Bucarest, Rumania).

propósito de la práctica y el volumen del cálculo es mínimo.

En las fórmulas dadas para el cálculo del período fundamental y rigideces relativas no se hace ninguna aproximación de los detalles geométricos y elásticos de la estructura, ni de variación de las cargas que actúan al nivel de cada piso.

En relación con las anteriores, las fórmulas propuestas por M.P. White y M.G. Salvadori, tienen un dominio más limitado de aplicación, como puede verse de los valores de los períodos obtenidos para diversas razones de las rigideces y de las masas. La sistematización propuesta por J.A. Blume se basa en la fórmula de Rayleigh, que se deriva aplicando el principio de la conservación de la energía. Estas fórmulas se obtienen considerando la hipótesis de vigas de rigidez infinita, lo que introduce otra aproximación; en cambio, esto no sucede en los valores contenidos en las tablas dadas en el trabajo del profesor Raúl Husid, pues en ellos se consideran las rigideces conocidas.

PROCEDIMIENTO DE CALCULO

A continuación se presenta el modo de aplicar la fórmula que proponemos, sin dar la demostración, que fue publicada anteriormente[6 a 9]. Los resultados se presentan en las Tablas que acompañan este trabajo.

Para el cálculo del período fundamental se ha propuesto la siguiente fórmula:

$$T = \psi \sqrt{\frac{m_o}{R_o}} \qquad (20)^*$$

donde

$$\psi = \frac{2\pi}{\nu_n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k \, u_k^*\right]^{1/2} \qquad (21)$$

y

$$u_k^* = \sum_{i=1}^{k} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_i + \ldots + u_k \qquad (22)$$

Los símbolos utilizados en las fórmulas anteriores y sus significados son los siguientes (Fig. 1):

$$a_1 = \frac{m_1}{m_o} \ldots\, a_i = \frac{m_i}{m_o} \ldots\, a_n = \frac{m_n}{m_o}$$

$$R_1 = \eta_1 R_o \ldots\, R_i = \eta_i R_o \ldots\, R_n = \eta_n R_o$$

$$u_1 = \frac{1}{\eta_1} \ldots\, u_i = \frac{1}{\eta_i} \ldots\, u_n = \frac{1}{\eta_n}$$

*La numeración de las fórmulas, referencias y tablas continúa la del artículo en discusión.

R_i, R_k - representan las rigideces de los pisos i, k respectivamente*.

m_i, m_k - las masas de las cargas gravitacionales Q_i, Q_k que accionan la estructura en los niveles i, k respectivamente;

m_o, R_o - valores arbitrarios de la masa y de la rigidez;

η_i, η_k - coeficientes de rigidez;

a_i, a_k - coeficientes de masa;

u_i, u_k - características de deformación;

n - número de pisos que tiene la estructura;

ν_n - coeficiente de corrección del período fundamental, que depende del número de pisos n de la estructura.

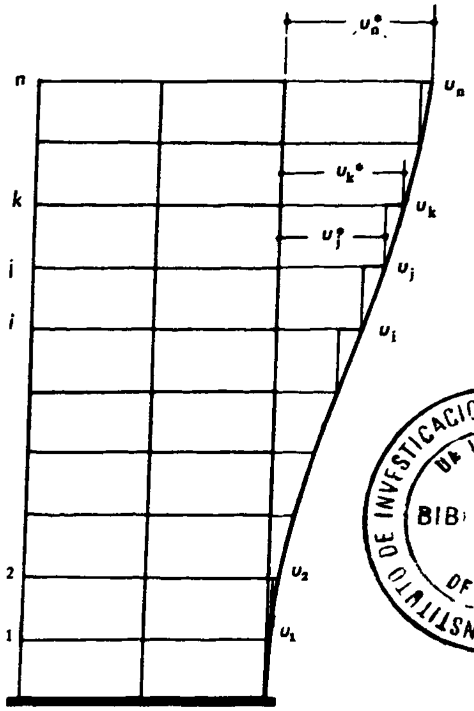

Fig. 1. Características de deformación.

En el caso de los edificios con distribución uniforme de masas y rigideces, para ψ resulta la expresión:

$$\psi = \frac{2\pi}{\nu_n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{1/2} \qquad (23)$$

Los valores numéricos de los coeficientes de corrección ν_n, se dan y discuten en los trabajos mencionados[6 a 9]. Para el cálculo práctico se pueden considerar los siguientes valores globales en función de n:

para $n = 1$	$\nu_1 = 1$	$\frac{2\pi}{\nu_1} = 6{,}28$
para $n = 2$	$\nu_2 \approx 1{,}05$	$\frac{2\pi}{\nu_2} \approx 6{,}00$
para $n = 3$	$\nu_n \approx 1{,}10$	$\frac{2\pi}{\nu_n} \approx 5{,}70$

Recapitulando, el cálculo práctico se va a hacer utilizando las siguientes fórmulas:

$$T = \psi\sqrt{\frac{m_o}{R_o}}$$

*En el artículo de R. Husid, las rigideces están expresadas por la letra k.

Tabla IX

Elaboracion de los datos para el calculo del periodo de diferentes estructuras

	Pisos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Estructura nº 57	R_k	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	η_k	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	u_k	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	m_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	a_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	u_k^*	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	$a_k u_k^*$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Estructura nº 67	R_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	η_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	u_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	m_k	1	0,975	0,950	0,925	0,900	0,875	0,850	0,825	0,800	0,775
	a_k	1	0,975	0,950	0,925	0,900	0,875	0,850	0,825	0,800	0,775
	u_k^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$a_k u_k^*$	1	1,95	2,85	3,70	4,50	5,25	5,95	6,60	7,20	7,75
Estructura nº 74	R_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	η_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	u_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	m_k	1	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55
	a_k	1	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55
	u_k^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$a_k u_k^*$	1	1,90	2,70	3,40	4,0	4,5	4,9	5,2	5,4	5,5
Estructura nº 83	R_k	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	η_k	1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
	u_k	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	m_k	2	1	0,975	0,950	0,925	0,900	0,875	0,850	0,825	0,800
	a_k	1	0,5	0,487	0,475	0,463	0,450	0,437	0,425	0,413	0,400
	u_k^*	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46
	$a_k u_k^*$	1	3	5,357	7,600	9,723	11,700	13,547	15,300	16,933	18,400
Estructura nº 89	R_k	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	η_k	1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
	u_k	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	m_k	2	1	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60
	a_k	1	0,5	0,475	0,450	0,425	0,400	0,375	0,350	0,325	0,300
	u_k^*	1	6	11	16	21	26	31	36	41	51
	$a_k u_k^*$	1	3	5,225	7,200	8,925	10,400	11,625	12,600	13,325	15,300
Estructura nº 95	R_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4
	η_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4
	u_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4
	m_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4
	a_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,4
	u_k^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11,5
	$a_k u_k^*$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4,6

TABLA X

CALCULO DEL PERIODO A PARTIR DE LOS VALORES DE LA TABLA IX

Estructura nº	R'_o+	m'_o+	$\sum_1^{10} a_k u_k^*$	$\psi = 5{,}7\sqrt{a_k u_k^*} = T\sqrt{\frac{R_o}{m_o}}$
57	2	1	100,00	57,00
67	1	1	46,75	38,97
74	1	1	38,50	35,38
83	5	2	102,56	57,74
89	5	2	88,60	53,65
95	1	1	49,60	40,14

+ Estos valores son relativos. Para calcular el período hay que usar los valores reales de R_o y m_o en unidades consistentes.

TABLA XI

PERIODOS DE EDIFICIOS CON RIGIDEZ DE CORTE DE 2 A 24 PISOS CON DISTRIBUCIONES UNIFORMES DE MASAS Y RIGIDECES

Estructura nº	Nº de pisos	Valores de $T\sqrt{\frac{R_o}{m_o}}$				
		Valor exacto	White	Salvadori	Husid	Ifrim
1	2	10,17	10,17	8	9,80	10,39
2	3	14,12	14,12	12	13,87	13,96
3	4	18,09	18,09	16	17,90	18,03
4	5	22,08	22,07	20	21,91	22,08
5	6	26,06	26,06	24	25,92	26,12
6	7	30,05	30,05	28	29,93	30,16
7	8	34,05	34,05	32	33,94	34,00
8	9	38,04	38,04	36	37,95	38,23
9	10	42,04	42,04	40	41,95	42,27
10	12	50,03	50,03	48	49,96	50,34
11	14	58,03	58,03	56	57,97	58,40
12	16	66,02	66,03	64	65,97	66,47
13	18	74,02	74,02	72	73,97	74,53
14	20	82,02	82,02	80	81,98	82,60
15	22	90,02	90,02	88	89,98	90,66
16	24	98,02	98,02	96	97,98	98,72

donde

$$\psi = 6{,}28\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k^*\right]^{1/2} \quad , \text{ cuando } n = 1$$

$$\psi = 6{,}00\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k^*\right]^{1/2} \quad , \text{ cuando } n = 2$$

$$\psi = 5{,}70\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k^*\right]^{1/2} \quad , \text{ cuando } n \geqslant 3$$

El cálculo es simple, pudiendo ser conducido directamente como se muestra en las Tablas IX y X en que se han considerado algunas estructuras del artículo de Raúl Husid a que nos estamos refiriendo. Es evidente que todos los valores que intervienen en esta fórmula tienen que ser conocidos, tomando en cuenta que lo más importante es la rigidez relativa entre dos pisos consecutivos. Como hemos dicho, el autor de esta nota ha establecido expresiones directas para el cálculo de las rigideces relativas entre pisos[9].

Conociendo el período fundamental de vibración, se pueden calcular los coeficientes sísmicos espectrales y en consecuencia el esfuerzo de corte basal F.

El esfuerzo de corte basal permite deducir las fuerzas horizontales aplicadas al nivel de cada piso, utilizando las fórmulas:

$$F_k = \frac{Q_k \quad u_k^*}{\sum_{k=1}^{n} Q_k\, u_k^*}\, F \qquad (k = 1,2, \ldots i, \ldots n) \quad (24)$$

A continuación, también pueden ser calculados los desplazamientos laterales por los esfuerzos sísmicos. Al nivel k, su valor relativo es:

$$\delta_k = \frac{J_k}{R_k} = \frac{J_k}{\eta_k R_o} = \frac{1}{R_o} \cdot u_k\, J_k \qquad (25)$$

y el desplazamiento horizontal total a la altura de nivel k

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{k} \delta_i$$

Se ha designado con J_k el esfuerzo de corte correspondiente al piso k (Fig. 2).

Con relación a las determinaciones directas de los diagramas finales de los momentos de flexión el problema es más simple, por lo cual no vamos a insis-

TABLA XII

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 2 PISOS CON RIGIDEZ DE CORTE

Estructura nº	$R_2:R_1$	$m_2:m_1$	Valores de $T\sqrt{\frac{R_1}{m_1}}$				
			Valor exacto	White	Salvadori	Husid	Ifrim
17	1:2	1:1	11,61	11,74	9,24	11,31	12
18	1:3	1:1	13,03	12,46	9,80	12,63	13,41
19	1:4	1:1	14,38	12,86	10,12	13,84	14,69
20	1:5	1:1	15,64	13,13	10,33	14,97	15,87
21	1:10	1:1	20,93	13,71	10,79	19,60	20,79
22	1:100	1:1	63,15	14,31	11,26	57,13	60,60
23	2:1	1:1	9,49	8,30	6,53	8,94	9,49
24	10:1	1:1	9,00	4,33	3,41	8,20	8,70
25	100:1	1:1	8,89	1,43	1,13	8,02	8,49
26	2:1	1:2	7,90	7,19	5,66	7,48	7,93
27	3:1	2:1	11,70	8,81	6,93	10,83	11,49

TABLA XIII

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 3 PISOS CON RIGIDEZ DE CORTE

Estructura nº	$R_1:R_2:R_3$	$m_1:m_2:m_3$	Valores de $T\sqrt{\frac{R_1}{m_1}}$				
			Valor exacto	White	Salvadori	Husid	Ifrim
28	3:2:1	1:1:1	16,87	17,32	14,80	16,95	17,10
29	5:3:1	1:1:1	18,89	18,23	15,40	19,02	19,18
30	8:5:2	1:1:1	17,90	17,89	15,20	18,05	18,20
31	4:3:2	1:1:1	15,69	16,43	13,96	15,64	15,77
32	3:3:1	1:1:1	15,80	16,00	13,60	16,00	16,12
33	1:3:1	1:1:1	12,44	10,05	9,23	12,20	12,31
34	5:3:1	5:3:1	10,69	14,14	12,00	11,50	11,58
35	1:3:1	1:2:1	14,22	12,63	10,73	13,84	13,96
36	1:1:1	10:7:4	10,76	11,82	10,02	10,73	10,81
37	1:1:1	1:1:2	17,64	16,30	13,83	16,97	17,10
38	100:1:1	1:1:1	102,03	24,23	20,58	98,47	99,22
39	10:1:1	1:1:1	33,33	22,33	18,97	32,50	32,74
40	5:1:1	1:1:1	24,45	20,68	17,57	24,00	24,19
41	2:1:1	1:1:1	17,16	17,30	14,70	16,97	17,10
42	1:100:100	1:1:1	10,91	1,73	1,47	9,85	9,92
43	1:10:10	1:1:1	11,19	5,34	4,54	10,28	10,35
44	1:2:2	1:1:1	12,48	10,94	9,30	12,00	12,09

TABLA XIV

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 4 PISOS CON RIGIDEZ DE CORTE

Estructura nº	$R_1:R_2:R_3:R_4$	$m_1:m_2:m_3:m_4$	Valores de $T\sqrt{\frac{R_1}{m_1}}$				
			Valor exacto	White	Salvadori	Husid	Ifrim
45	15:11:7:3	1:1:1:1	22,95	23,35	21,60	23,58	23,74
46	1:4:4:4	1:1:1:1	13,98	10,05	8,90	13,27	13,37
47	3:11:7:3	1:1:1:1	14,75	12,74	11,25	14,61	14,72
48	1:4:4:4:	1:3:1:2	18,66	13,29	11,73	17,66	17,80
49	1:1:1:10	1:1:1:4	25,93	13,29	11,73	24,28	24,45
50	1:1:1:10	1:4:1:1	22,80	13,29	11,73	21,98	22,15
51	1:1:1:1	1:2:2:1	22,37	22,19	19,58	21,90	22,07
52	1:4:4:4	1:2:2:2	18,97	13,29	11,73	17,89	18,01
53	1:10:10:10	1:1:1:1	13,12	6,50	5,75	12,13	12,23
54	1:100:100:100	1:1:1:1	12,62	2,09	1,84	11,40	11,49
55	100:1:1:1	1:1:1:1	141,56	35,65	31,53	139,02	140,08

TABLA XV

PERIODOS DE EDIFICIOS DE 10 PISOS CON RIGIDEZ DE CORTE

Estructura* nº	Valor de $T\sqrt{\frac{R_1}{m_1}}$				
	Valor exacto	White	Salvadori	Husid	Ifrim
57	56,65	56,42	53,88	56,57	57,00
59	86,90	79,18	75,81	86,72	87,38
63	24,46	19,60	18,65	24,66	24,85
65	23,22	16,06	15,28	22,36	22,52
67	38,55	39,60	37,68	38,68	38,97
70	22,64	18,46	17,57	22,84	23,02
71	21,63	15,13	14,40	20,85	21,01
74	34,75	37,01	35,21	35,10	35,38
77	20,70	17,25	16,42	20,86	21,02
81	37,18	40,15	38,33	37,54	37,83
83	57,12	56,20	53,70	57,29	57,74
85	79,73	68,28	65,22	80,00	80,62
87	34,20	38,24	36,58	35,61	34,95
89	52,13	53,50	51,19	52,74	53,65
91	72,90	65,20	62,23	73,67	74,23
93	41,26	41,85	40,00	41,26	41,57
94	40,54	41,85	40,00	40,56	40,86
95	39,66	41,85	40,00	39,84	40,14
96	39,74	42,33	40,45	40,24	40,54
97	39,82	42,52	40,63	41,03	41,34

* Las razones entre rigideces y distribuciones de masas de estas estructuras se dan en la Tabla IX.

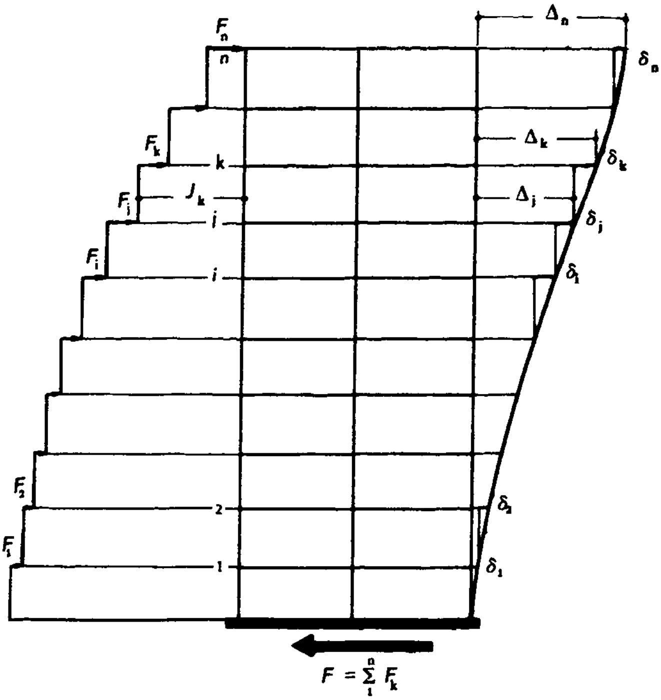

Fig. 2. Esfuerzos de corte y desplazamientos de una estructura de varios pisos.

tir en ello[9].

En las Tablas XI a XV se presentan los resultados obtenidos al utilizar la fórmula (20), comparándolos con los cálculos exactos, y con las fórmulas propuestas por M.P. White, M.G. Salvadori y R. Husid; se observa que la fórmula (20) dan resultados, por lo que son recomendables para utilizarlas en la práctica.

En la Tabla XVI se presenta el cálculo del período por la fórmula (20) para el edificio de 5 pisos considerado en la Tabla VIII de R. Husid. El valor obtenido es $T_1 = 0{,}8404$; J.A. Blume había obtenido para este edificio, aplicando el método de Rayleigh, $T_1 = 0{,}8249$; la fórmula de Husid da $T_1 = 0{,}8379$ seg, y el valor exacto, calculado por Salvadori, es $T_1 = 0{,}8314$.

Los cálculos que he efectuado se basan en los datos contenidos en el trabajo del profesor R. Husid. De igual manera se ha respetado la numeración de las estructuras, así como los valores de los períodos fundamentales obtenidos por los autores mencionados.

TABLA XVI

CALCULO DEL PERIODO FUNDAMENTAL PARA UNA ESTRUCTURA DE 5 PISOS (EN CONFORMIDAD CON LA TABLA VIII)

R_k	$11{,}40\times10^3$	$10{,}26\times10^3$	$9{,}12\times10^3$	$7{,}98\times10^3$	$6{,}84\times10^3$
η_k	1,666	1,500	1,333	1,167	1,000
u_k	0,600	0,667	0,750	0,857	1,000
m_k	15,35	15,35	15,35	15,35	11,65
a_k	1,318	1,318	1,318	1,318	1,000
u_k^*	0,600	1,267	2,017	2,874	3,874
$a_k u_k^*$	0, 791	1,670	2,658	3,788	3,874

$\sum_{k=1}^{5} a_k u_k^* = 12{,}781$; $\psi = 20{,}378$; $R_0 = 6{,}84\times10^3$; $m_0 = 11{,}65$; $T_1 = 0{,}8404$ seg

REFERENCIAS

6. IFRIM, M. "Contributions to the problem of building vibrations during earthquake". Revue de Mécanique Appliquée, tome III, nº 2 (1958), Bucarest.
7. IFRIM, M. "Appreciation on the fundamental vibration frequency of tall structures subjected to seismic action". Revue de Mécanique Appliquée, tome IV, nº 1 (1959), Bucarest.
8. IFRIM, M. "Dynamic analysis of tall structures subjected to earthquake motion". Proceedings of the II World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, Japan, june 1960.
9. IFRIM, M. "Contributions to the seismic analysis of frame structures". Proceedings of the III Conference on Earthquake Engineering, Auckland-Wellington, New-Zealand, january february 1965.

RESPUESTA DEL AUTOR

El autor agradece al profesor Mihail Ifrim por su discusión, en la cual, además de analizar la validez y facilidad de aplicación de la fórmula propuesta, nos presenta una fórmula propia para el cálculo del período.

Es interesante hacer notar que para edificios de dos pisos y en los cuales es usual suponer que la estructura tiene sólo dos grados de libertad (movimiento plano y no se considera la gravedad) es posible calcular exactamente las dos frecuencias naturales:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{k_1}{m_1}\left[1+\lambda+\frac{\lambda}{\epsilon}+\sqrt{(1+\lambda+\frac{\lambda}{\epsilon})^2-\frac{4\lambda}{\epsilon}}\right] \qquad (26)$$

donde

$$\lambda = \frac{k_2}{k_1} \qquad , \epsilon = \frac{m_2}{m_2}$$

La expresión (26) para el caso de masas iguales, o sea $\epsilon = 1,0$ se reduce a la expresión siguiente[10].

$$\omega^2_{1,2\,\epsilon=1,0} = \frac{2\lambda+1 \pm \sqrt{4\lambda^2+1}}{2}\,\frac{k_1}{m} \qquad (27)$$

Para edificios de un piso se tiene la bien conocida relación

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \qquad (28)$$

Por la razón recién mencionada más arriba, no consideramos de interés proponer fórmulas aproximadas (que sean precisas) para calcular los períodos de estructuras de uno y dos pisos. El cálculo exacto es elemental y no presenta dificultades de ningún tipo, como se aprecia en (28), (26) y (27). Al deducir la fórmula (17) del texto original se pretendía cambiar la expresión del período para sistemas de varios grados de libertad, evitándose así tener que recurrir a métodos exactos para edificios con un número considerable de pisos, que derivan en gran cantidad de cálculos numéricos. En el texto se hace ver que la fórmula propuesta dio, para distribuciones de masas y rigideces que comprenden en buena forma los casos de la práctica y también para distribuciones poco reales, errores inferiores a 10% en relación a los períodos exactos y que, en los casos en que los errores fueron mayores de 5%, las distribuciones de rigideces se alejan mucho de las que se encuentran en la práctica.

El profesor Ifrim presenta en forma separada los casos $n = 1$, $n=2$ y $n \geqslant 3$ y lo hace a través de tres valores diferentes de su coeficiente ν.

Para $n = 1$, la fórmula para ψ sólo nos reproduce el equivalente a la relación (28) o sea

$$T = 6{,}28\sqrt{\frac{m_o}{R_o}} = 6{,}28\sqrt{\frac{\delta}{g}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}$$

donde δ tiene el mismo significado que en el texto original

Para $n = 2$, Ifrim obtiene

$$\psi = 6{,}00\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\, \upsilon^*_k\right]^{1/2}$$

y con esta adaptación, innecesaria para un valor de n que permite usar la fórmula exacta (26), obtiene errores algo menores.

El que la fórmula propuesta produzca errores algo mayores para edificios de dos pisos, puede subsanarse reemplazando el coeficiente de $4\sqrt{2}$ por otro 1,06 veces mayor, con lo cual se obtienen resultados casi idénticos a los presentados por Ifrim.

El verdadero interés por una fórmula simple y rápida para determinar el período de edificios se presenta para edificios altos,cuando el método exacto y los métodos energéticos requieren gran cantidad de cálculos numéricos.

Podemos observar en la Tabla XV que de un total de 20 edificios de diez pisos allí considerados, sólo en tres de ellos la fórmula Ifrim da mejores resultados que la propuesta por el autor.

Al revisar la Tabla XI es notorio que para $n = 6$, los resultados de Ifrim son levemente mejores y en cambio para el resto de la Tabla, la fórmula propuesta da prácticamente los valores exactos de los períodos.

Ambas fórmulas permiten una precisión adecuada si se considera que los valores (calculados) de las rigideces pueden diferir grandemente de los verdaderos debido a factores tales como, calidad de los materiales de construcción, altura efectiva de pisos y elementos no estructurales generalmente no considerados en el cómputo del período.

En la mayor parte de los casos estudiados y que cubren los casos prácticos, los resultados obtenidos con ambas fórmulas son similares. La facilidad con que se pueden usar ambas fórmulas hacen recomendables tanto la una como la otra.

Al calcular las fuerzas horizontales a partir del esfuerzo de corte basal (resultante de todos los modos de vibrar de la estructura) Ifrim utiliza una fórmula (24) que no es la adecuada. Si $u_k{}^*$ son (como parecen serlo) los desplazamientos correspondientes al modo fundamental de oscilación, (24) involucra aceptar que la estructura se deforma sólo en su primera forma natural, lo que está muy lejos de la realidad en muchos casos de la práctica. En pocas palabras, aceptar la fórmula (24) es equivalente a despreciar la influencia de los modos superiores de oscilación en la respuesta de los edificios al ser solicitados por terremotos.

El autor no logró ubicar uno de los trabajos donde Ifrim da y discute los valores numéricos de los coeficientes de corrección ν_n y por ello desconoce su justificación.

Revisando los trabajos publicados por la 3ª Conferencia Mundial de Ingeniería Antisísmica realizada en Nueva Zelandia en 1965 el autor no encontró el mencionado en la bibliografía bajo el número 9. Por esta razón lamenta no poder comentar las expresiones directas para el cálculo de las rigideces relativas entre pisos a que Ifrim se refiere en su discusión.

REFERENCIAS

10. HUSID, R. "Estudio teórico sobre la repartición vertical de fuerzas sísmicas en edificios". Tesis para optar al título de Ingeniero Civil en la Universidad de Chile, Santiago de Chile, 1960.