DIMENSIONAMIENTO DE SOPORTES ESBELTOS DE HORMIGON ARMADO
METODO DE LAS CURVATURAS DE REFERENCIA

Hugo CORRES P.*

RESUMEN

Se expone las conclusiones de una investigación teórica para el cálculo y dimensionamiento de columnas esbeltas basada en el método de las curvaturas de referencia.

INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de estructuras esbeltas de hormigón armado constituye un problema con grandes complicaciones debido a que se trata de un fenómeno altamente no lineal.

Existe por un lado, la no linealidad geométrica debida a la influencia no despreciable de la deformación sobre los esfuerzos. Este problema es habitualmente conocido con el nombre de efecto de segundo orden.

Existe además, la no linealidad física debida a la respuesta no lineal del hormigón armado. El diagrama momento-curvatura de una sección de hormigón armado es un diagrama no lineal.

La complejidad es aun mayor debido a que en este tipo de estructuras es necesario comprobar dos estados límites últimos: el estado límite último de agotamiento, que se produce cuando la estructura deformada alcanza un estado de equilibrio estable con deformaciones que constituyen un estado de agotamiento en la sección crítica, y el estado límite último de inestabilidad, que se produce cuando la estructura deformada alcanza un estado de equilibrio inestable sin que en ninguna sección se produzca un estado de deformación de agotamiento.

---

* Dr. Ingeniero de Caminos Canales y Puertos. Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento.

Las consecuencias inmediatas de las particularidades comentadas, respecto al análisis y dimensionamiento de este tipo de estructuras, pueden sintetizarse de la siguiente forma:

No es posible realizar el análisis de esfuerzos y el dimensionamiento de secciones en forma independiente, tal como se hace corrientemente.

Para conocer los esfuerzos teniendo en cuenta la deformación de la estructura es necesario evaluar esta deformación utilizando los diagrama momento-curvatura de las distintas secciones.

El diagrama momento-curvatura de una sección de hormigón armado depende de la forma de la sección, cuantía y distribución de armaduras, características de los materiales constitutivos y carga axial actuante.

No se cumple el principio de superposición. La estructura se debe comprobar para cada hipótesis de carga independientemente.

Es necesario comprobar dos estados límites últimos: el de agotamiento, que depende de las deformaciones de la sección, y el de inestabilidad, que depende de la deformación de la estructura.

En la actualidad existen dos procedimientos disponibles para el análisis de este tipo de estructuras, según se expone en los epígrafes siguientes.

Comprobación global mediante cálculo no lineal.

Este procedimiento sólo permite la comprobación de estructuras esbeltas de hormigón armado. Para su utilización es necesario partir de un predimensionamiento tanto de las dimensiones geométricas como de la cuantía y distribución de armadura de cada sección.

La comprobación constituye un proceso iterativo hasta encontrar el estado deformado compatible y equilibrado, utilizando los diagramas momento-curvatura de cada sección, que representan la respuesta de la misma para cada estado de solicitación.

Un procedimiento de este tipo implica necesariamente la utilización de grandes computadoras. Por otra parte es necesario tener en cuenta que la única información que se obtiene se refiere a la respuesta de la estructura frente a cada hipótesis de carga. Un análisis de este tipo no permite conocer directamente el grado de sobredimensionamiento que pudiera existir.

Soporte equivalente

Constituye el procedimiento simplificado más difundido y representa una alternativa posible para el dimensionamiento de este tipo de estructuras.

Este procedimiento propone el análisis de esfuerzos mediante un cálculo elástico lineal de primer orden, y el dimensionamiento de cada elemento esbelto sustituyéndolo por un soporte equivalente biarticulado de sección constante.

El soporte equivalente se considera sometido a los esfuerzos obtenidos en el cálculo elástico lineal de primer orden, y el efecto del resto de la estructura se tiene en cuenta considerando una longitud adecuada para dicho soporte.

Para la obtención de la longitud del soporte equivalente existen distintas propuestas aunque las más difundidas son el estudio de la deformada elastica de la estructura[1,2] o el uso de nomogramas[3,4].

El estado actual del análisis y dimensionamiento del soporte equivalente puede describirse en forma rápida tal como se expone en los epígrafes siguientes

Método de comprobación

Los métodos de comprobación de soportes equivalentes permiten, con una propuesta más simple, la comprobación mediante cálculo no lineal de este tipo de estructuras.

La no linealidad mecánica se tiene en cuenta mediante el diagrama momento-curvatura de la sección del soporte equivalente.

La no linealidad geométrica se tiene en cuenta en forma simplificada a través de la hipótesis de deformada conocida del soporte. Esta hipótesis consiste en admitir que la deformada del soporte se puede expresar por una función conocida, y tiene la ventaja importante de que permite, en forma más o menos sencilla, obtener una relación entre la deformación total de la sección más solicitada y su curvatura, que se conoce como directriz geométrica.

Las condiciones de equilibrio y compatibilidad se plantean sólo en la sección más solicitada y se cumplen simultáneamente en los puntos comunes del diagrama momento-curvatura y la directriz geométrica.

Los métodos de comprobación para soportes equivalentes más difundidos son:

Método de la columna modelo (MCM)[1,2].

Método de la deformada senoidal (MDS)[5 a 9]

Los métodos de comprobación propuestos permiten representar con adecuada precisión el comportamiento de los soportes equivalentes, aunque mantienen los inconvenientes indicados para la comprobación global mediante cálculo no lineal, no permiten el dimensionamiento y necesitan el uso de computadoras.

Tablas y ábacos de dimensionamiento

Mediante la aplicación de los métodos de comprobación en forma sistemática se presentan en la bibliografía tablas y ábacos de dimensionamiento:

Diagramas de interacción de soportes esbeltos[1,10,11].

Tablas de dimensionamiento[1].

Nomogramas[12].

Estos elementos, que constituyen un medio de dimensionamiento directo (permiten obtener directamente la cuantía estricta correspondiente al soporte estudiado), no proponen en sí mismos un método de dimensionamiento y tienen el inconveniente que, debido a la gran cantidad de parámetros que intervienen en el problema, una colección que tenga en cuenta los parámetros más frecuentes debería tener un gran número de ábacos o tablas. Por otra parte obligan a interpolaciones para los valores no considerados, que dificultan notablemente su uso, ya que suelen ser necesarias interpolaciones entre distintos graficos o tablas.

Fórmulas de dimensionamiento indirecto

El procedimiento más frecuente empleado es el de las fórmulas de dimensionamiento indirecto propuestas en las normas de los distintos países:

Excentricidad o momento complementario[1,13,14,15].

Magnificación del momento[4,10].

Excentricidad ficticia[17,18].

La filosofía general de estas fórmulas consiste en reducir el problema del soporte equivalente a un problema de flexión compuesta utilizando como esfuerzos de cálculo los obtenidos en el análisis de primer orden transformados mediante las distintas fórmulas (excentricidad o momento complementario, coeficiente de magnificación del momento, excentricidad ficticia) para tener en cuenta los efectos de la esbeltez.

Estas fórmulas, muy cómodas para el uso cotidiano del proyectista, constituyen simplificaciones más o menos groseras que conducen a resultados generalmente muy del lado de la seguridad y en algunos casos a resultados inseguros.

Un análisis crítico del estado actual del análisis y dimensionamiento de los soportes equivalentes nos permite obtener las conclusiones que se exponen a continuación.

Los **métodos de comprobación** (dado el soporte completamente definido) permiten representar el comportamiento de los soportes equivalentes con adecuada precisión.

No existe en la bibliografía un **método de dimensionamiento** directo.

Las fórmulas de **dimensionamiento indirecto**, ampliamente difundidas, constituyen simplificaciones groseras que conducen el problema a un dimensionamiento en flexión compuesta (nuevamente diagramas de interacción o fórmulas simplificadas) y dan resultados inseguros o muy del lado de la inseguridad.

METODO DE LAS CURVATURAS DE REFERENCIA

El método de las curvaturas de referencia (MCR)[19 a 24], que se presenta, constituye el resultado de un trabajo de investigación planteado con objeto de encontrar un método de dimensionamiento directo para soportes equivalentes que resolviese los problemas que presentan los procedimientos existentes.

El objetivo que se persiguió en el transcurso de la investigación fue encontrar un método de dimensionamiento directo que pudiese satisfacer las exigencias que anotamos a continuación.

Generalidad. Se intentaba buscar un procedimiento válido para soportes con sección transversal de forma cualquiera y con distintas distribuciones de armadura, así como para distintas características del hormigón y el acero.

Precisión. Tal como se ha comentado en el apartado anterior, los métodos existentes de mayor precisión son los métodos de comprobación. Se intentaba buscar un procedimiento que permitiese obtener resultados de precisión comparable con los MCM o MDS.

Representación del fenómeno físico. Dada la complejidad del fenómeno tratado es necesario que las simplificaciones que se realizan para obtener un procedimiento operativo permitan siempre dejar claro el fenómeno que se está analizando. Las fórmulas simplificadas utilizadas por los distintos códigos para el dimensionamiento de soportes esbeltos, representan el efecto de la esbeltez como un aumento de momento que siempre conduce al agotamiento de la sección más solicitada y no se puede deducir de ninguna forma que el dimensionamiento puede ser debido y, frecuentemente lo es, al estado límite último de inestabilidad.

Facilidad de uso. El método buscado debería servir para uso cotidiano del proyectista y por lo tanto debería ser de cómoda aplicación.

En los siguientes apartados se exponen de forma detallada las distintas hipótesis adoptadas y su justificación, así como las ideas fundamentales del funcionamiento del método propuesto.

No linealidad mecánica. Hipótesis relativa a los diagramas momento-curvatura

Debido al comportamiento no lineal del hormigón y del acero, así como al fenómeno de fisuración, no existe proporcionalidad entre las curvaturas y los momentos para una carga axil dada.

Esta no linealidad intrínseca del hormigón armado debe tenerse adecuadamente en cuenta, ya que resulta imprescindible para la evaluación correcta de las deformaciones del soporte.

En el MCR la no linealidad mecánica se tiene en cuenta utilizando el diagrama momento-curvatura correspondiente a la sección del soporte que se analiza.

Para la obtención de los diagramas momento-curvatura se han utilizado las hipótesis que se señalan a continuación que corresponden a las propuestas en la Instrucción Española y son también las propuestas por el CEB.

1. Las secciones normales a la directriz se mantienen planas y normales a ella durante la deformación.

   Esta hipótesis, que es generalmente aceptada, es particularmente válida para el caso de elementos esbeltos como los que se estudian.

2. Bajo la acción de las solicitaciones, las armaduras tienen la misma deformación que el hormigón que las rodea. Se acepta la existencia de perfecta adherencia entre el hormigón y el acero.

3. Se admite que la tensión de la fibra de hormigón corresponde unívocamente al valor de la deformación en dicha fibra, de acuerdo con el diagrama tensión-deformación de la Fig. 1.

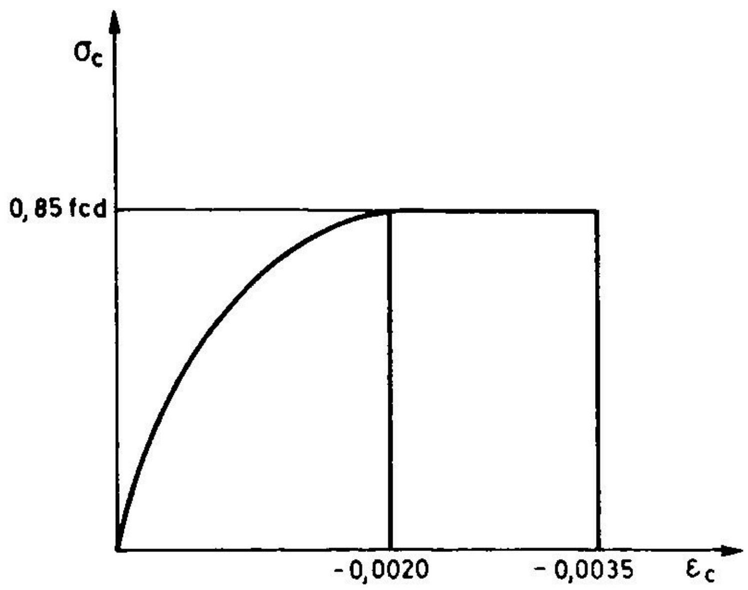


Fig. 1a. Diagrama tensión-deformación del hormigón.

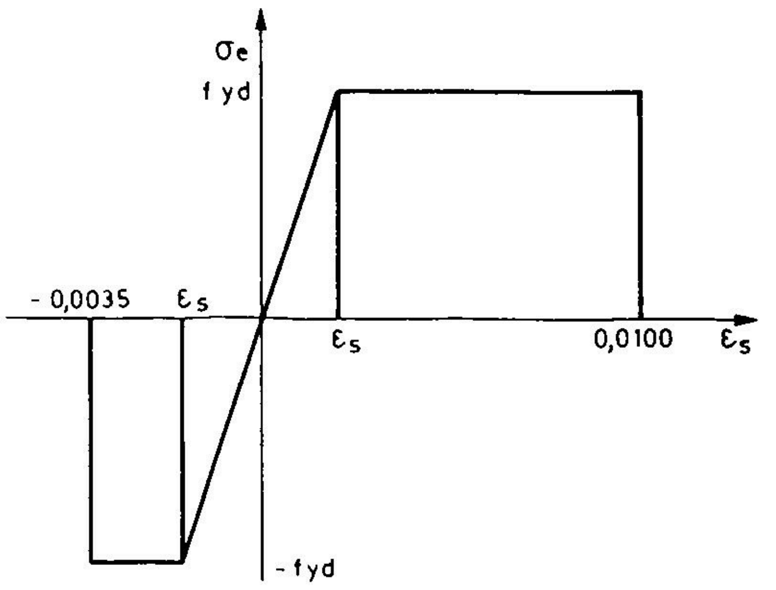


Fig. 1b. Diagrama tensión-deformación del acero.

Para deformaciones de compresión el diagrama adoptado es el parábola rectángulo. Este diagrama, propuesto por el CEB para el cálculo de esfuerzos resistentes en agotamiento, no representa adecuadamente el módulo de elasticidad inicial, y por lo tanto para pequeñas curvaturas puede resultar insatisfactorio. Sin embargo, si se tiene en cuenta que la sección más solicitada presenta un estado de deformación importante cuando se produce tanto el estado límite último de agotamiento como el de inestabilidad, y si se considera que el equilibrio y compatibilidad del soporte sólo se plantea en esta sección, los estados en los que las deformaciones son pequeñas no suelen influir en el dimensionamiento. Por esta razón, y dado que utilizar otro tipo de diagrama tensión-deformación para el hormigón en compresión, que represente adecuadamente el módulo de elasticidad inicial, puede plantear complicaciones de cálculo numérico, se justifica la decisión adoptada.

Para deformaciones de tracción se considera siempre tensión nula, esto es se desprecia la colaboración de la resistencia a tracción del hormigón.

4. La deformación en cualquier armadura se obtiene a partir de la deformación de la fibra correspondiente de acuerdo con el diagrama tensión-deformación de la Fig. 1.S

   Solamente se ha considerado acero dureza natural ya que éste es el acero más frecuentemente utilizado. Sin embargo el MCR se puede utilizar para secciones armadas con aceros endurecidos en frío, sólo que en este caso el diagrama momento-curvatura debe obtenerse utilizando el diagrama tensión-deformación correspondientemente.

5. Se admiten como dominios de deformación del hormigón y el acero en el estado límite último de agotamiento los indicados en la Fig. 2. En ella se representa el diagrama de pivotes y los distintos estados de deformación de agotamiento definidos por las deformaciones de la fibra de hormigón más comprimida y la deformación de la armadura más traccionada.

Definidas las hipótesis, el diagrama momento-curvatura de una sección determinada para un axil dado se obtiene mediante un proceso iterativo mediante el cual se resuelve para cada curvatura el sistema de ecuaciones siguientes:

$$N_i = \int_0^{x_n} \sigma_c(\epsilon_c) b(x) dx + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si}(\epsilon_{si}) A_i \quad 1$$

$$M_i = \int_0^{x_1} \sigma_c(\epsilon_c) b(x) dx + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si}(\epsilon_{si}) x_i A_i \quad 2$$

siendo:

N_i = el axil resistente;
M_i = el momento resistente;
σ_c = la tensión de una fibra genérica de hormigón;
ϵ_c = la deformación de una fibra genérica de hormigón;
σ_s = la tensión de una fibra genérica de acero;
ϵ_s = la deformación de una fibra genérica de acero;
$b(x)$ = la anchura de la sección de hormigón a una profundidad x;
x = la profundidad de una fibra genérica de hormigón;
x_i = la profundidad de una fibra genérica de acero;
x_n = la profundidad del eje neutro.

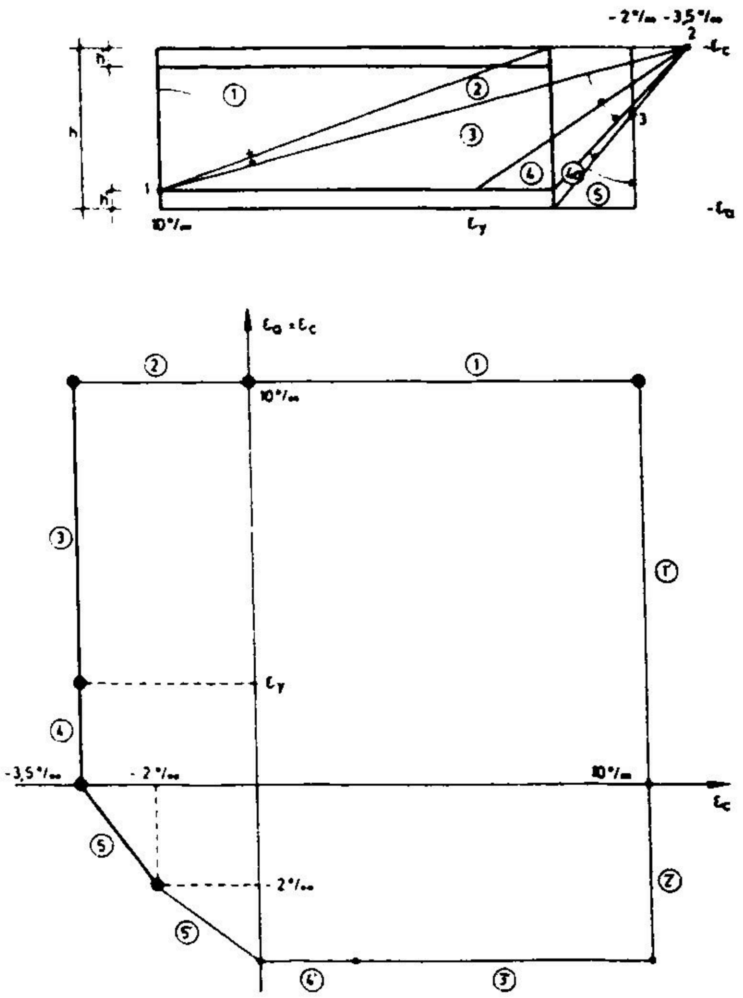


Fig. 2. Estados de deformación de agotamiento.

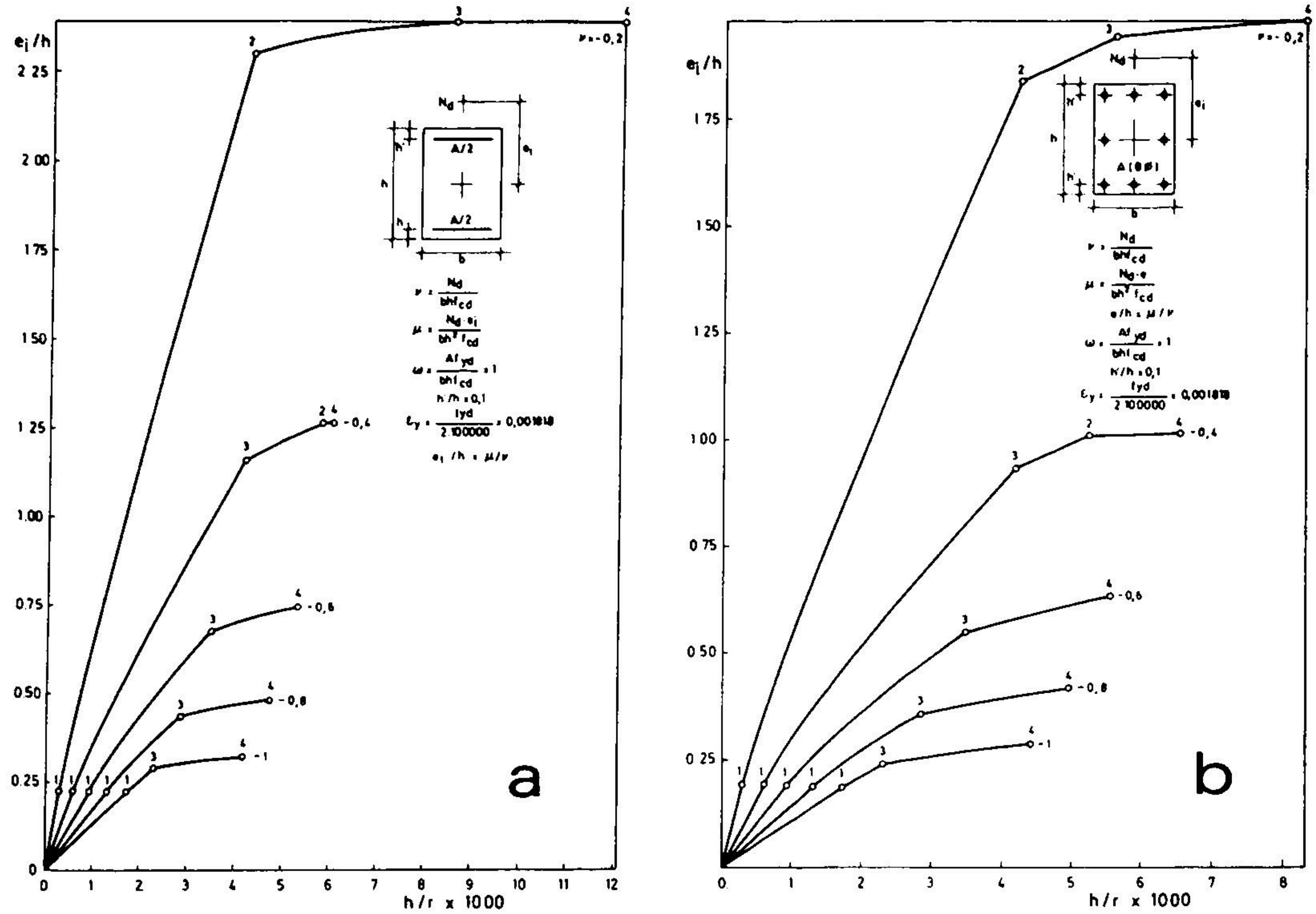
Para cada curvatura se debe ir variando la posición del eje neutro (x_n) hasta que la ec. 1 dé un axil igual al existente en la sección. Resolviendo luego la ec. 2 con estos valores de curvatura y profundidad del eje neutro se obtiene el momento que con la curvatura de partida define un punto del diagrama momento-curvatura.

Variando con un incremento adecuado las curvaturas de la sección desde 0 a la curvatura de agotamiento correspondiente, se puede definir por puntos el diagrama momento-curvatura.

A los efectos del MCR se ha utilizado una representación diferente de los diagramas momentos-curvaturas, conocidas como directriz mecánica, que relaciona las excentricidades y las curvaturas.

En la Fig. 3 se muestran las directrices mecánicas correspondientes a secciones rectangulares con diferente distribución de armadura y distintos axiles.

Tal como puede pensarse, la construcción de las directrices mecánicas[25] constituye una tarea laboriosa que necesita del uso de una computadora. Por esta razón, la idea más significativa del MCR es la de utilizar una simplificación adecuada de la directriz mecánica que facilita y permite el dimensionamiento.



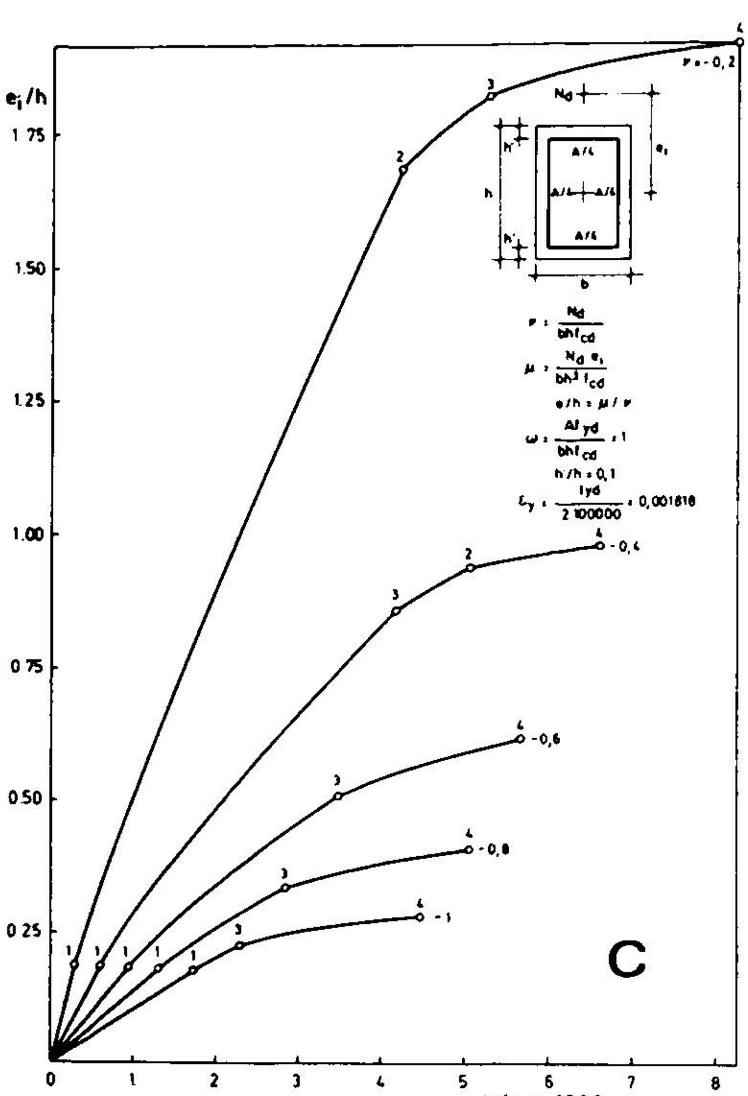


Fig. 3. No linealidad mecánica. Directrices mecánicas.

No linealidad geométrica. Hipótesis de deformada conocida

Se entiende como no linealidad geométrica el efecto producido por las deformaciones sobre los esfuerzos.

Para conocer el estado real de deformaciones de un soporte es necesario integrar doblemente el diagrama de curvaturas reales del mismo y proceder iterativamente hasta encontrar una deformada que sea compatible y equilibrada.

Una hipótesis muy difundida, que ha sido adoptada desde las primeras investigaciones sobre soportes esbeltos, es la de suponer que se conoce la forma que tiene la deformada del soporte. En otras palabras suponer una distribución adecuada de curvaturas a lo largo del elemento, y plantear el equilibrio y la compatibilidad sólo en una sección, la sección más solicitada o sección crítica.

De esta forma es posible obtener una relación que vincula la excentricidad total y la curvatura de la sección más solicitada, que se conoce con el nombre de directriz geométrica.

Utilizar el concepto de directriz geométrica simplifica notablemente el proceso de cálculo de una deformada compatible y equilibrada para un soporte con unas determinadas condiciones de carga. Sólo se trata de buscar puntos comunes de la directriz geométrica y mecánica, que representan estados de equilibrio.

Los métodos de comprobación para soportes equivalentes siempre utilizan esta hipótesis.

En el MCM se considera que el soporte tiene una distribución de curvaturas de tipo senoidal.

Definida la distribución de curvaturas se puede conocer, tal como se ha indicado, la deformada del soporte que resulta de la doble integral de las curvaturas. Siendo la distribución de curvaturas senoidal, su doble integral será una senoidal.

Evaluando la expresión de la deformada para la sección crítica se puede obtener la expresión:

$$e_{II} = \frac{l^2}{10}\,\frac{1}{r} \qquad 3$$

siendo:

e_{II} = la excentricidad de segundo orden de la sección crítica;
l = la longitud del soporte equivalente;
$1/r$ = la curvatura de la sección crítica;
$10 \approx \pi^2$

que vincula la excentricidad de segundo orden y la curvatura de la sección crítica.

En este caso, que sólo es aplicable para soportes con excentricidades de primer orden iguales en los extremos, se puede expresar la relación entre la excentricidad total y la curvatura de la sección crítica como sigue:

$$e_t = e_0 + \frac{l^2}{10}\,\frac{1}{r} \qquad 4$$

siendo:

e_t = la excentricidad total;
e_0 = la excentricidad de primer orden.

En general, conocida la longitud de un soporte equivalente y la excentricidad de primer orden es posible obtener su directriz geométrica correspondiente. Definida la forma, dimensiones, cuantía y distribución transversal y las características de los materiales que la constituyen, y con el axil correspondiente, se puede además obtener su directriz mecánica.

La comprobación consiste en estudiar ambas directrices y averiguar si existen puntos de intersección entre ambos. Cualquier punto de intersección representa un estado de equilibrio del soporte.

En la Fig. 4 se muestra gráficamente el MCM para un soporte genérico. Como puede observarse, la directriz geométrica ($e_1/e_2 = 1$) corta a la directriz mecánica en dos puntos.

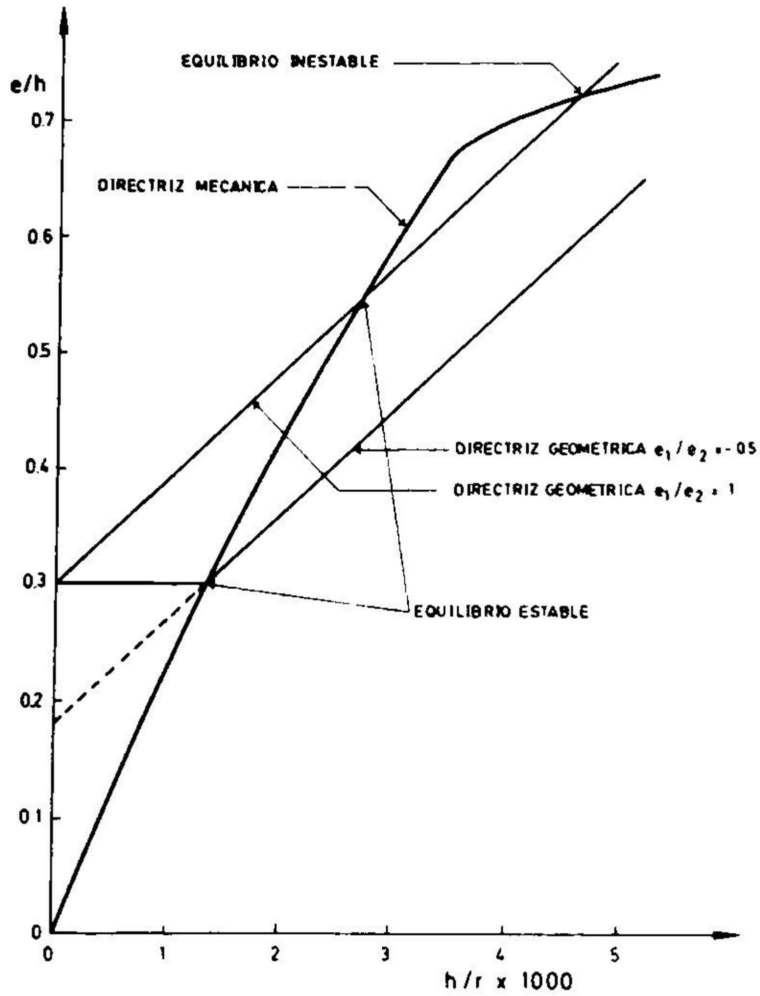


Fig. 4. No linealidad geométrica. Hipótesis de distribución de curvaturas senoidal MCM.

El primero representa un estado de equilibrio estable, ya que para pequeñas variaciones de curvatura, el soporte siempre restablecerá su equilibrio con la curvatura correspondiente a la intersección. El segundo representa un estado de equilibrio inestable, ya que cualquier aumento de curvatura conduce irremediablemente a incrementos mayores de los esfuerzos solicitantes (directriz geométrica) que los resistentes (directriz mecánica).

Si bien la hipótesis de distribución de curvaturas senoidal adoptada por el MCM conduce a resultados de suficiente precisión, y da lugar a una expresión sencilla de directriz geométrica, tiene el inconveniente de no ser directamente aplicable al caso de soportes con excentricidades desiguales en las articulaciones.

Para la solución de este problema el MCM propone una simplificación, que consiste en admitir que el comportamiento de un soporte con excentricidades desiguales en las articulaciones puede asimilarse al comportamiento del mismo soporte con una excentricidad equivalente constante en su longitud y cuyo valor está definido por la siguiente expresión:

$$e_{0_{eq}} = 0.6e_2 + 0.4e_1 \qquad 5$$

siendo:

$e_{0_{eq}}$ = la excentricidad equivalente;

e_2 = la mayor, en valor absoluto, de las excentricidades de primer orden en los extremos del soporte;

e_1 = la menor, en valor absoluto, de las excentricidades de primer orden en los extremos del soporte.

La directriz geométrica así definida resulta del tipo de la dibujada en la Fig. 4, indicada con $e_1/e_2 \neq 1$

Como puede verse, la directriz geométrica de soportes con excentricidades distintas en las articulaciones se compone de dos tramos rectos. El primero, horizontal, representa al rango de curvaturas para el que la excentricidad máxima sigue siendo la máxima de primer orden. En este tramo existen excentricidades de segundo orden en las secciones interiores del soporte, pero la suma de éstas y las de primer orden correspondientes no supera la máxima de la articulación. La sección crítica es la sección de la articulación con mayor excentricidad de primer orden. El segundo tramo, inclinado, representa estados de deformación para los que la sección crítica es interior al soporte.

Una hipótesis más adecuada, especialmente porque tiene en cuenta el caso de soportes con excentricidades desiguales en las articulaciones, es la que propone el MDS.

En este método se supone que las excentricidades totales siguen una ley senoidal con valores predeterminados de excentricidades en las articulaciones. Esta hipótesis da lugar a una expresión indirecta de la directriz geométrica, puesto que es explícita en curvaturas, y sin duda más complicada que la anterior:

$$\frac{1}{r} = \frac{e_t}{l^2}\left(\text{arc cos}\frac{e_2}{e_t} - \text{arc cos}\frac{e_1}{e^t}\right)^2 \qquad 6$$

$$\frac{1}{r^*} = \frac{e_2}{2}\left(\text{arc cos}\frac{e_1}{e_2}\right)^2 \qquad 7$$

En la Fig. 5, se presenta graficamente el MDS. Para el caso de $e_1/e_2 = 1$ la directriz geométrica está constituida por una curva monótona creciente parecida a la recta del MCM. Para excentricidades desiguales la directriz geométrica tiene dos tramos, uno horizontal hasta la curvatura $1/r^*$ con idéntico significado que en el caso anterior y otro constituido por una curva monótona creciente.

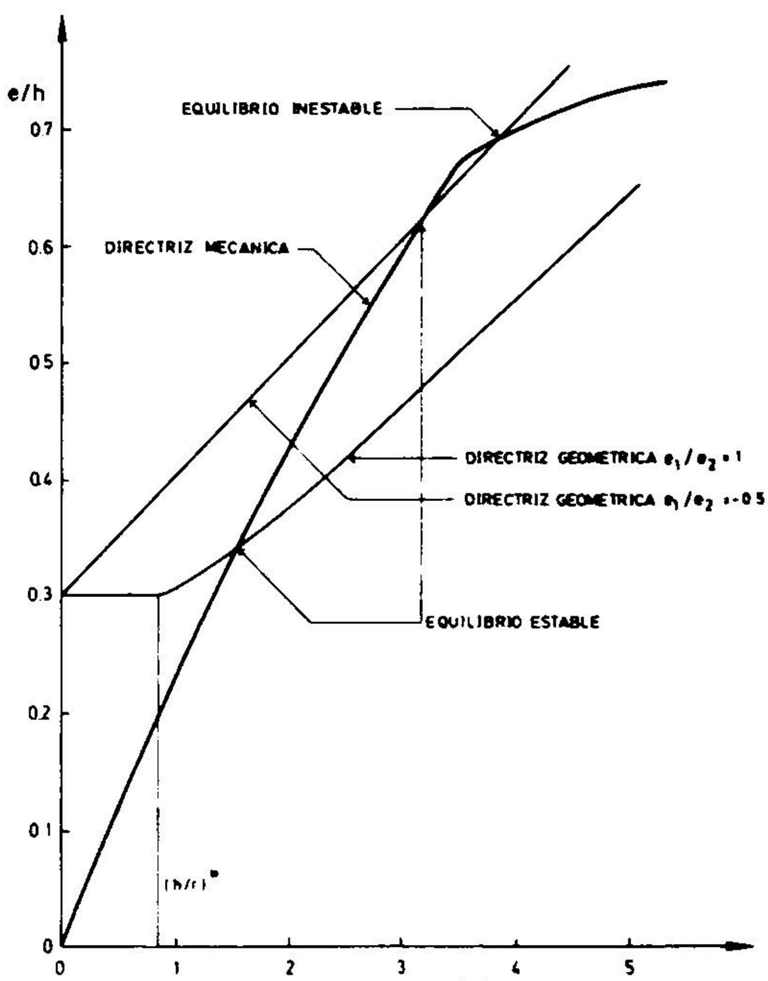


Fig. 5. No linealidad geométrica. Hipótesis de distribución senoidal de excentricidades totales MDS.

El MCR propuesto utiliza la hipótesis de deformada conocida, es decir, la idea de la directriz geométrica. Ha sido presentado utilizando las dos hipótesis explicadas, del MCM y MDS, pero es compatible con cualquier otra directriz geométrica. En este sentido el autor piensa que el tema de la directriz geométrica es un campo donde todavía se pueden hacer interesantes aportaciones tendientes a dar mayor generalidad y precisión al estudio de los soportes esbeltos.

Estados límites últimos

Tal como se ha indicado en la introducción, los soportes esbeltos de hormigón armado pueden dar origen a dos estados límites: de inestabilidad y de agotamiento de la sección crítica.

El estado límite último de agotamiento de la sección crítica se produce cuando el soporte alcanza un estado de equilibrio estable con deformaciones de tal magnitud que los esfuerzos en la sección crítica son los de agotamiento de la sección.

La Fig. 6, muestra gráficamente el caso de un soporte que alcanza este estado límite último, según la representación del MCM. Como puede verse se produce un estado de equilibrio estable, ya que existe un punto de intersección entre la directriz geométrica y la mecánica que coincide justamente con el último punto de la directriz mecánica que representa el agotamiento de la sección.

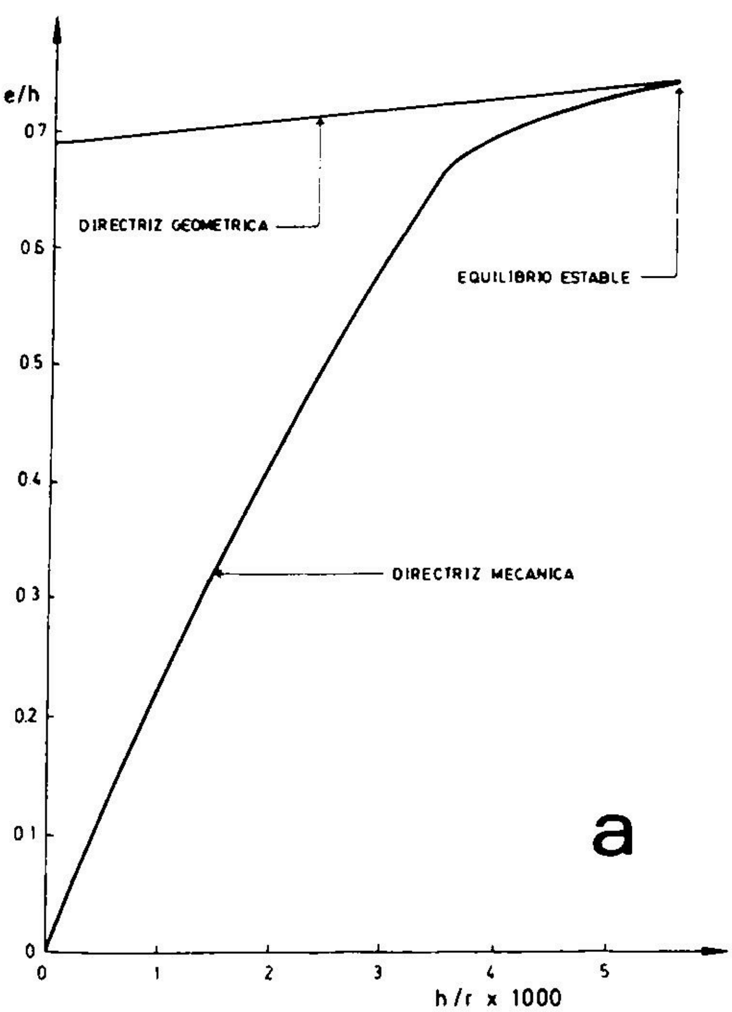


Fig. 6a. Estado límite último de agotamiento de la sección crítica.

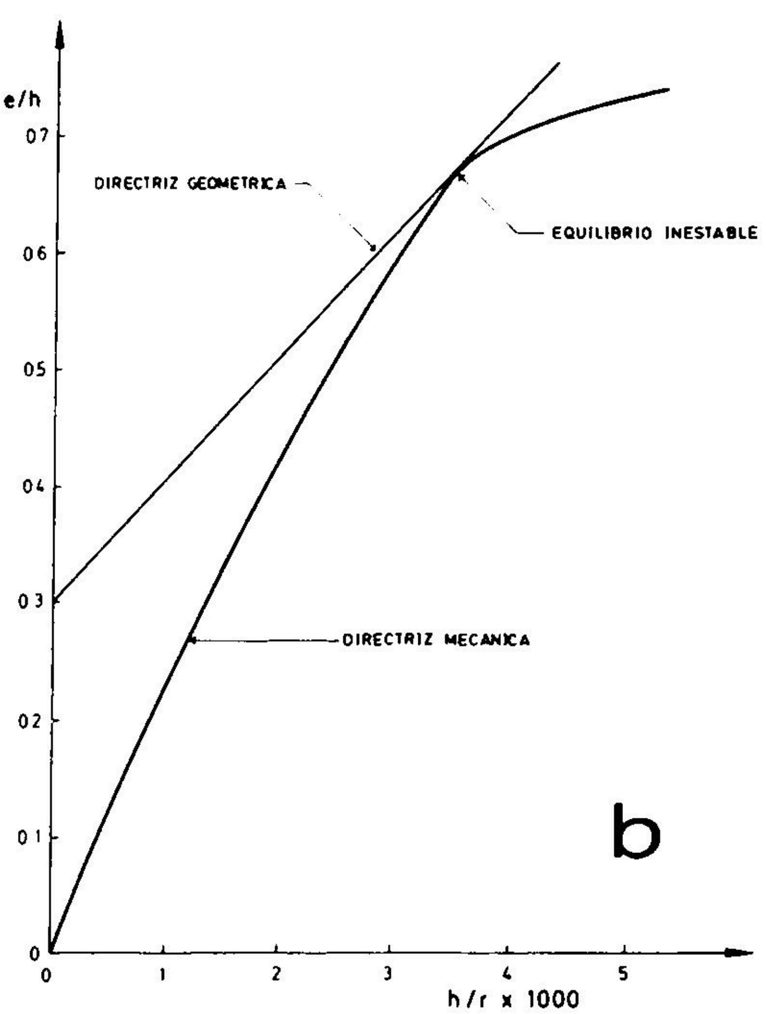


Fig. 6b. Estado límite último de inestabilidad.

La sección crítica habrá sufrido una deformación de segundo orden de magnitud igual a la diferencia de ordenadas entre la ordenada en el origen de la directriz geométrica, que representa la excentricidad inicial, y la ordenada del punto de intersección de ambas directrices.

El estado límite último de inestabilidad se produce cuando el soporte alcanza un estado de equilibrio inestable.

En la Fig. 7 se muestra el caso de un soporte que alcanza este estado límite último. Tal como se explicó, se produce un estado de equilibrio inestable cuando la directriz mecánica y geométrica son tangentes en un punto.

La curvatura correspondiente al punto de tangencia es una curvatura menor que la de agotamiento de la sección.

Existe finalmente una situación de transición en la que el soporte alcanza ambos estados límites últimos al mismo tiempo. Siguiendo con la representación del MCM, este caso correspondería a un soporte para el que la directriz mecánica y geométrica son tangentes en el último punto de la directriz mecánica.

Como puede comprenderse, debido a la existencia de los estados límites últimos explicados, no resulta fácil establecer un método preciso que permita resolver el problema del dimensionamiento de soportes equivalentes con un modelo que representa únicamente el estado límite último de agotamiento.

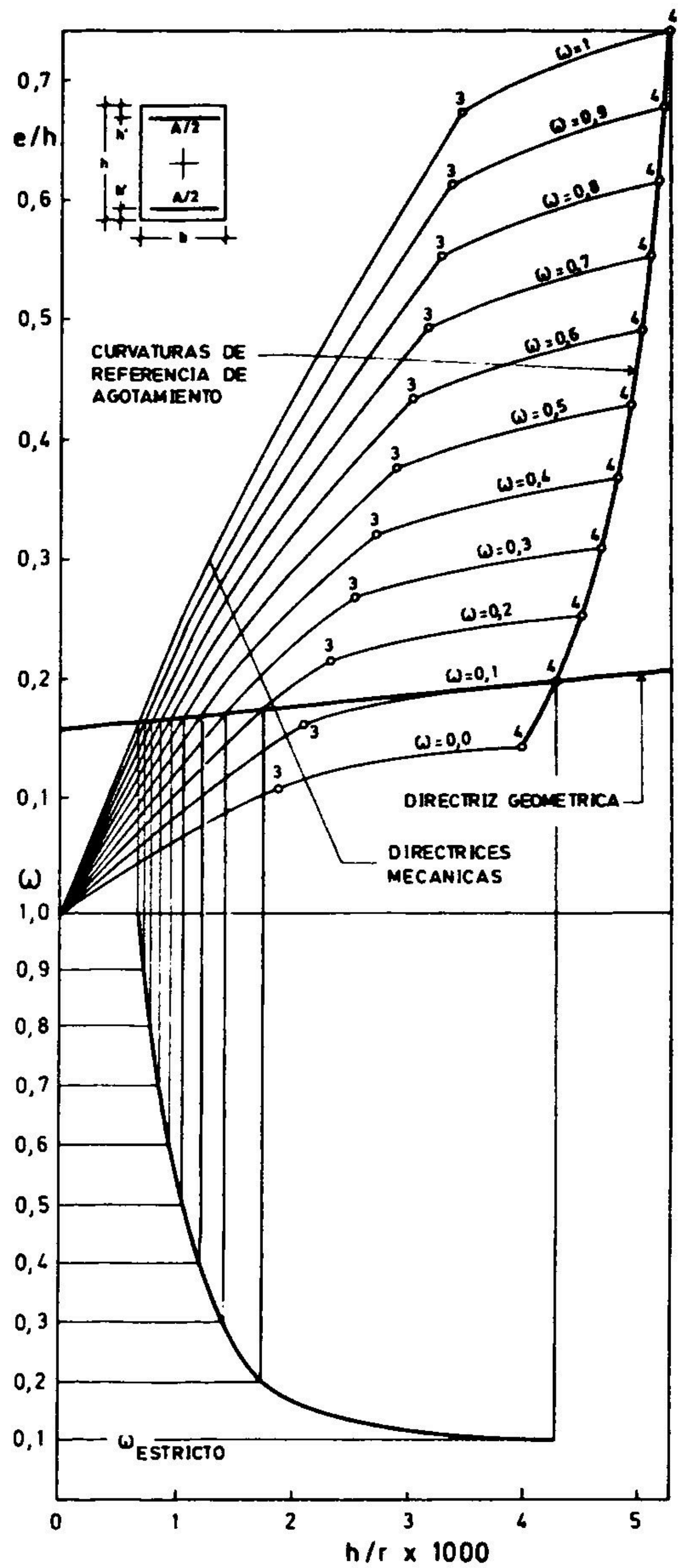


Fig. 7. Curva de curvaturas de referencia de agotamiento.

Método de las curvaturas de referencia

El planteamiento del problema del dimensionamiento de un soporte equivalente puede resumirse como sigue:

1. El proyectista dispone de los siguientes datos:
   l = longitud del soporte equivalente;
   e_1/e_2 = excentricidades de primer orden en las articulaciones;
   N = axil.
2. El proyectista debe elegir, según criterios arquitectónicos, constructivos, etc. Forma y dimensiones de la sección transversal,

Distribución de armadura;

fyd, fcd, resistencias de cálculo del hormigón y del acero.

3. El problema de dimensionamiento estricto consiste en obtener la cuantía de armadura mínima de la sección transversal, para la que el soporte alcanza un estado límite último.

Conocidas las excentricidades de las articulaciones e_1, e_2 y la longitud del soporte equivalente, y utilizando la hipótesis de deformada conocida, es posible definir la directriz geométrica del soporte a dimensionar.

Si por otro lado se conoce al axil y la forma, dimensiones, distribución de armaduras y características de los materiales de la sección transversal, es posible definir, para distintas cuantías de armadura, directrices mecánicas que representan el comportamiento resistente de la sección dimensionada.

Finalmente la cuantía correspondiente a la directriz mecánica que con la geométrica defina un estado límite último será la cuantía estricta de dimensionamiento, correspondiente al soporte analizado.

Se considera en primer lugar el caso de soportes que alcanzan el estado límite último de agotamiento de la sección crítica utilizando, por ejemplo, la hipótesis de distribución senoidal de curvaturas del MCM, (Fig. 7).

En este caso la armadura de dimensionamiento estricto será la que corresponda a la directriz mecánica que se intersecta con la directriz geométrica en el último punto de la directriz mecánica.

Para cualquier cuantía superior a la mínima, el soporte tendrá un estado de equilibrio estable, ya que la directriz geométrica tendrá por lo menos un punto de intersección con la mecánica correspondiente, y en estos casos no se habrá alcanzado el estado límite último.

Si se representan en un diagrama ω, h/r los puntos de equilibrio correspondientes a las distintas cuantías, tal como se muestra en la parte inferior de la Fig. 7, se obtiene una curva monótona descendente.

La curva ω, h/r representa estados de equilibrio estable para todas las cuantías y un estado de equilibrio estable y agotamiento de la sección en el último punto correspondiente a la cuantía mínima.

Si se conociese a priori que el soporte rompe por agotamiento de la sección crítica se habría obtenido la misma cuantía de dimensionamiento utilizando en vez de las directrices mecánicas completas, de laboriosa obtención, los últimos puntos de las mismas para distintas cuantías. Esta curva, llamada *curva de curvatura de referencia de agotamiento*, está formada por los últimos puntos de las directrices mecánicas, y representa la relación entre la excentricidad y la curvatura (e/h - h/r) para un axil ν y diferentes cuantías ω.

La intersección de la directriz geométrica y la curva de curvatura de referencia de agotamiento, graduada en cuantías, da directamente la cuantía de dimensionamiento estricto. En el caso de soportes cortos la directriz geométrica se transforma en una recta horizontal y la cuantía correspondiente a su intersección con la curva de curvaturas de referencia de agotamiento corresponde a un dimensionamiento estricto de la sección, igual al que se obtendría utilizando los diagramas de interacción de secciones.

En definitiva, la curva de curvatura de referencia de agotamiento permite el dimensionamiento estricto de soportes que alcanzan el estado límite último de agotamiento con la misma precisión que los métodos de comprobación (MCM o MDS) para el caso de soportes esbeltos y que los diagramas de interacción de secciones para soportes cortos.

Para soportes en los que se alcanza el estado límite último de inestabilidad Fig. 8, la cuantía estricta de dimensionamiento es la que corresponde a la directriz mecánica que es tangente a la geometría en un punto de la directriz mecánica que está situado a la izquierda del que representa el agotamiento de la sección.

La curva ω, h/r en este caso es una curva que presenta un mínimo relativo que corresponde a la cuantía estricta, con un tramo descendente para curvaturas inferiores a la de tangencia y otro ascendente para curvaturas mayores que la de tangencia. La rama descendente representa estados de equilibrio estable y la rama ascendente estados de equilibrio inestable.

En principio el punto de la directriz mecánica para el que se produce la inestabilidad puede ser cualquiera excepto el que representa el agotamiento de la sección, ya considerado.

Un detallado estudio sobre las directrices mecánicas y roturas de soportes esbeltos por inestabilidad ha permitido obtener las conclusiones que siguen:

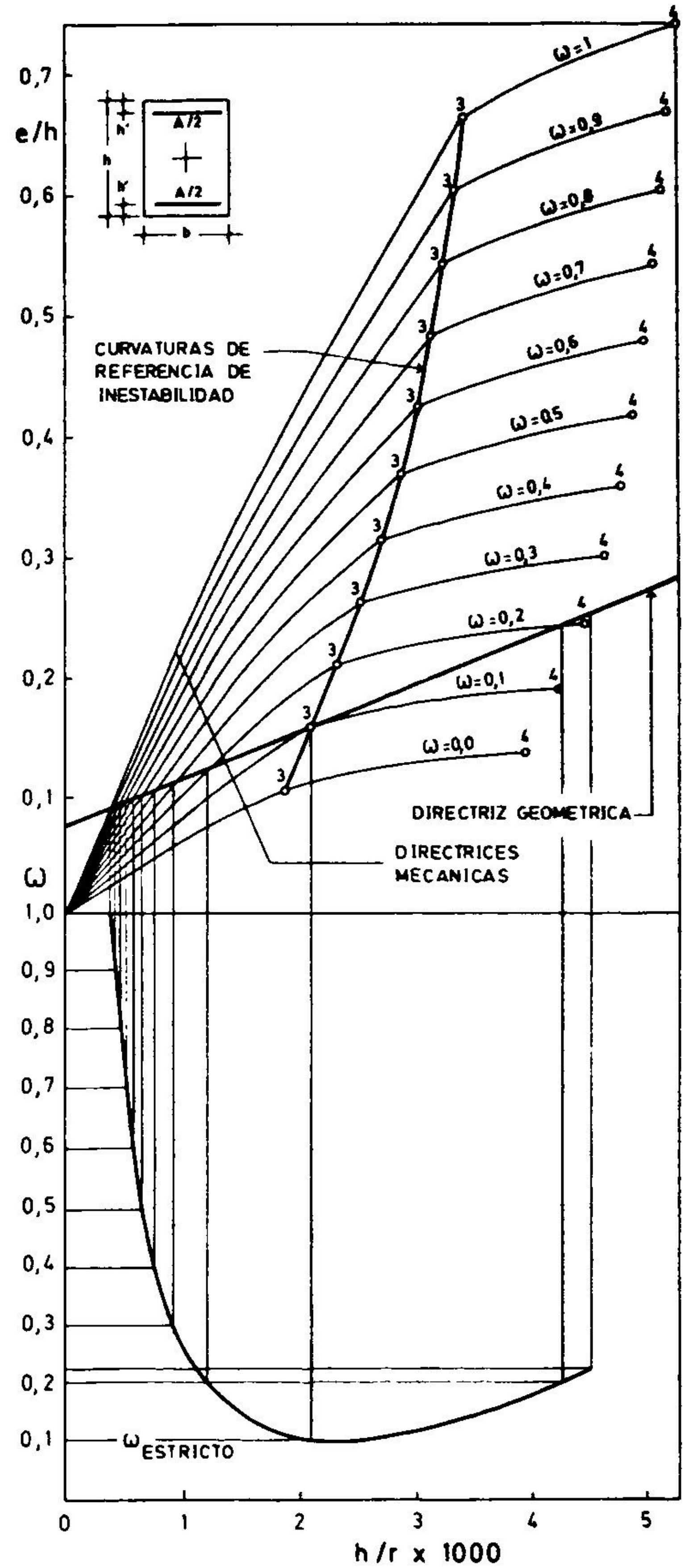


Fig. 8. Curva de curvatura de referencia de inestabilidad.

1. En las directrices mecánicas correspondientes a esfuerzos axiles bajos ($\nu \geqslant -0.4$) el punto correspondiente a la curvatura para la que se produce la deformación del límite elástico del acero en la armadura más traccionada constituye un punto crítico en el que se observa un repentino

cambio de pendiente de la directriz mecánica (punto 2 de la Fig. 3).

2. En las directrices mecánicas correspondientes a esfuerzos axiles elevados ($\nu \leqslant -0.4$) el punto correspondiente a la curvatura para la que se produce la deformación del límite elástico del acero en la armadura más comprimida constituye un punto crítico en el que se observa también un cambio brusco de pendiente en la directriz mecánica (punto 3 de la Fig. 3).

3. En la mayor parte de los casos el estado límite último de inestabilidad corresponde a uno de estos puntos.

4. Las curvas ω, h/r tienen un mínimo relativo que corresponde a la cuantía de diseño y presentan una extensa zona plana en el entorno de este punto. Por este motivo, si el estado límite último de inestabilidad se produce en otro punto distintos de los puntos críticos indicados en 1 y 2, el error que se comete en la evaluación de la cuantía estricta es pequeño y siempre del lado de la seguridad.

Consecuentemente es posible definir una curva de curvaturas de referencia de inestabilidad para el dimensionamiento de soportes que alcanzan este estado límite último. Esta curva está formada por los puntos críticos indicados en 1 y 2 de las directrices mecánicas, según la magnitud del axil considerado, y representa la relación entre la excentricidad y la probable curvatura de inestabilidad (e/h - h/r) para un valor de axil (ν) y diferentes cuantías (ω).

La intersección de esta curva con la directriz da directamente la cuantía estricta de diseño para soportes que rompen por inestabilidad, o por lo menos, una estimación de suficiente precisión y siempre del lado de la seguridad.

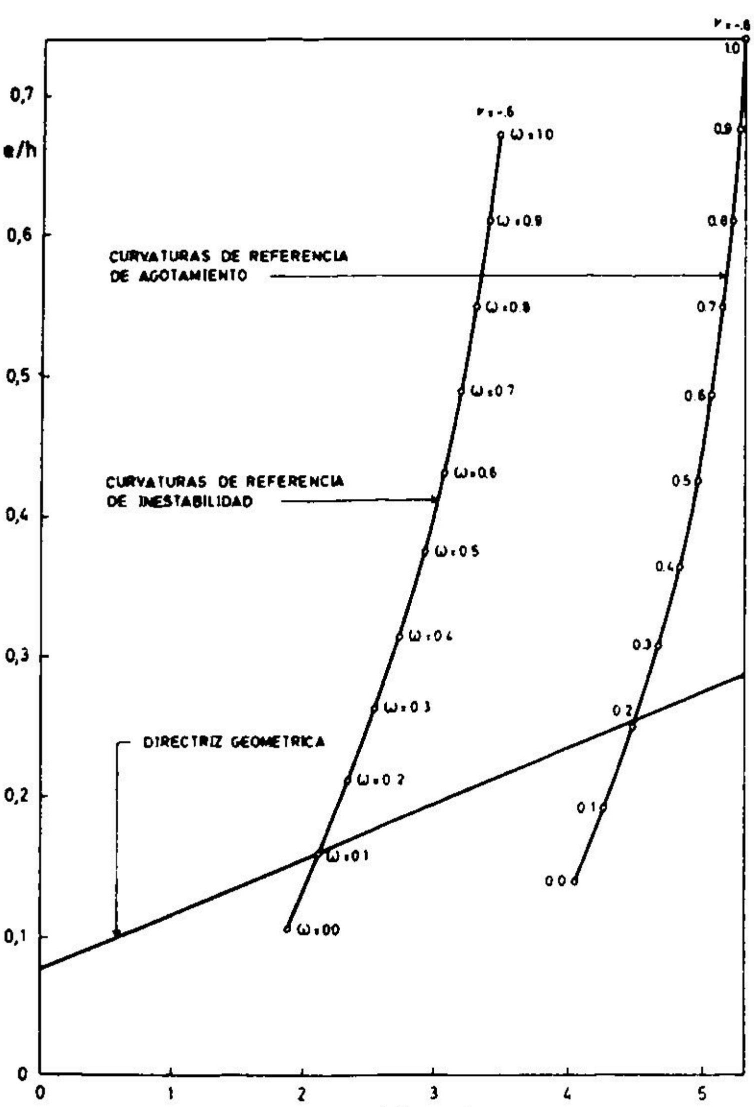


Fig. 9. Método de las curvaturas de referencia.

Finalmente, el MCR propuesto puede resumirse en los puntos que siguen:

El MCR utiliza la idea de directriz geométrica, es decir, la hipótesis de deformada conocida, y es compatible tanto con la propuesta en el MCM como en el MDS.

Propone la sustitución de las directrices mecánicas, de laboriosa obtención, por las llamadas de *curvaturas de referencia de agotamiento e inestabilidad*, vinculadas a los estados límites últimos de agotamiento de la sección crítica y de inestabilidad, respectivamente.

El dimensionamiento estricto de la armadura de un soporte consiste en obtener las cuantías correspondientes a la intersección de su directriz geométrica con las curvas de *curvaturas de referencia de inestabilidad y agotamiento,* y tomar como cuantía estricta la menor de las obtenidas, Fig. 9.

Efecto de las cargas permanentes. Fluencia.

Las cargas permanentes producen efectos importantes sobre el comportamiento de los soportes esbeltos: en general, provocan un aumento de la deformación debido a la fluencia del hormigón bajo carga, y en el caso de soportes muy esbeltos pueden provocar una rotura por inestabilidad debida a fluencia.

Existe en la bibliografía[1] dos procedimientos para tener en cuenta el efecto de las cargas permanentes en el caso de soportes equivalentes.

Procedimiento no lineal. Este procedimiento, puesto a punto para los métodos de comprobación, consiste en considerar una directriz mecánica que tenga en cuenta el efecto del aumento de deformaciones debido a fluencia. Para ello se construye la directriz mecánica utilizando como diagrama tensión-deformación el correspondiente a carga instantánea con una transformación homotética en deformaciones a través de un coeficiente de fluencia.

Procedimiento lineal. Este procedimiento consiste en considerar que el efecto de las cargas permanentes se traduce en un aumento de la excentricidad de la sección crítica.

Utilizando un modelo de fluencia lineal y sección homogénea se puede evaluar este aumento de excentricidad, considerándolo como parte de la excentricidad de primer orden.

Si bien el MCR propuesto se ha presentado sin discriminar el tipo de axil a considerar, es perfectamente compatible con ambos procedimientos.

Utilizando el procedimiento no lineal, para cada axil deberían calcularse las curvas de *curvaturas de referencia* a partir de directrices mecánicas obtenidas con un coeficiente de fluencia adecuado.

Utilizando el procedimiento lineal sólo debe evaluarse la excentricidad debida a fluencia considerando las características del axil existente y tomándose como excentricidad de primer orden para la definición de la directriz geométrica la suma de la excentricidad de primer orden real más la excentricidad debida a fluencia calculada.

ABACO DE DIMENSIONAMIENTO

Abacos de dimensionamiento

Los ábacos de dimensionamiento que se presentan constituyen una forma de utilización gráfica del método de las curvaturas de referencia (MCR). Han sido desarrollados[21,23] para secciones rectangulares con los tres diferentes tipos de distribución de armaduras que se han considerado más frecuentes: armaduras simétrica en caras opuestas, ocho redondos distribuidos simétricamente y armadura uniformemente distribuida en tres caras.

En todos los ábacos se ha considerado un recubrimiento relativo $h'/h = 0.1$. Respecto a las características de los materiales, sólo se ha considerado acero dureza natural $f_{yd} = 4.200/1.15$ kp/m^2. En las Fig. 10 a 15 se presenta una colección de ábacos de dimensionamiento.

Para cada tipo de sección se presentan dos ábacos, uno para axiles $\nu \geqslant -0.4$ y otro para $\nu \leqslant -0.4$. Esta decisión de dar dos ábacos por sección ha sido debida a problemas de escala, que de otra forma habrían motivado curvas demasiado pequeñas, y por tanto poco precisas, para axiles $\nu \leqslant -0.4$.

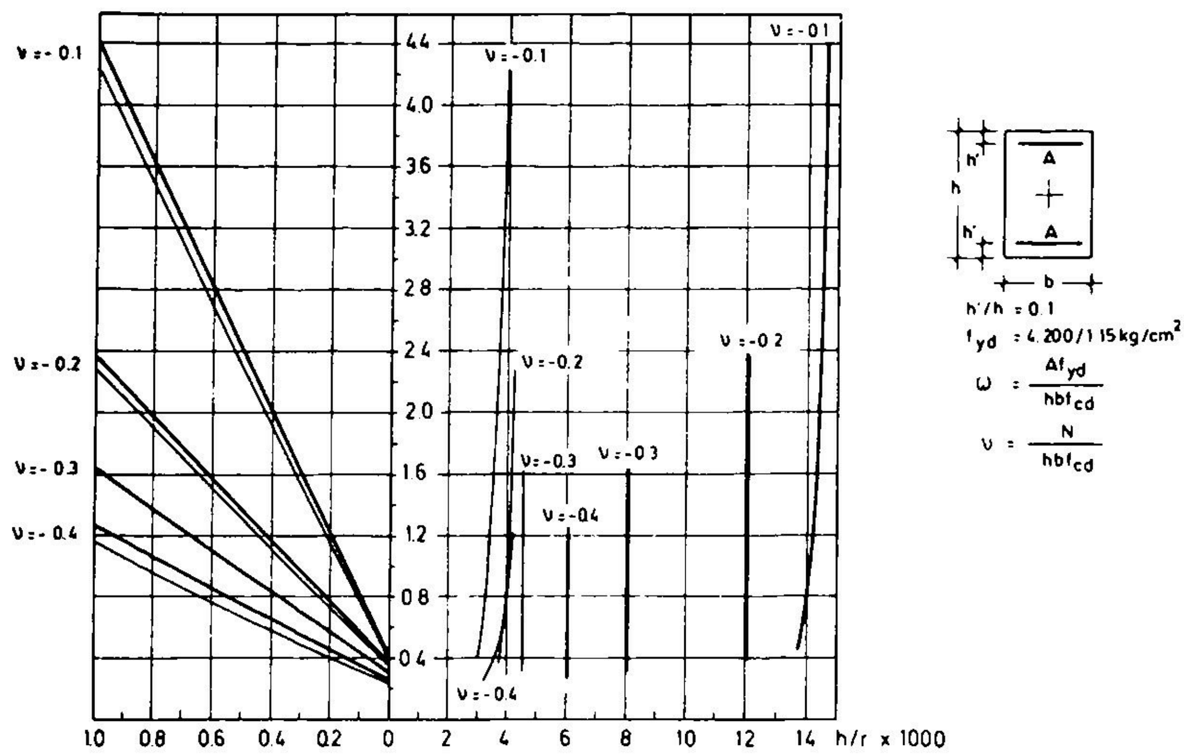


Fig. 10. Abaco de dimensionamiento $\nu \geqslant -0.4$.

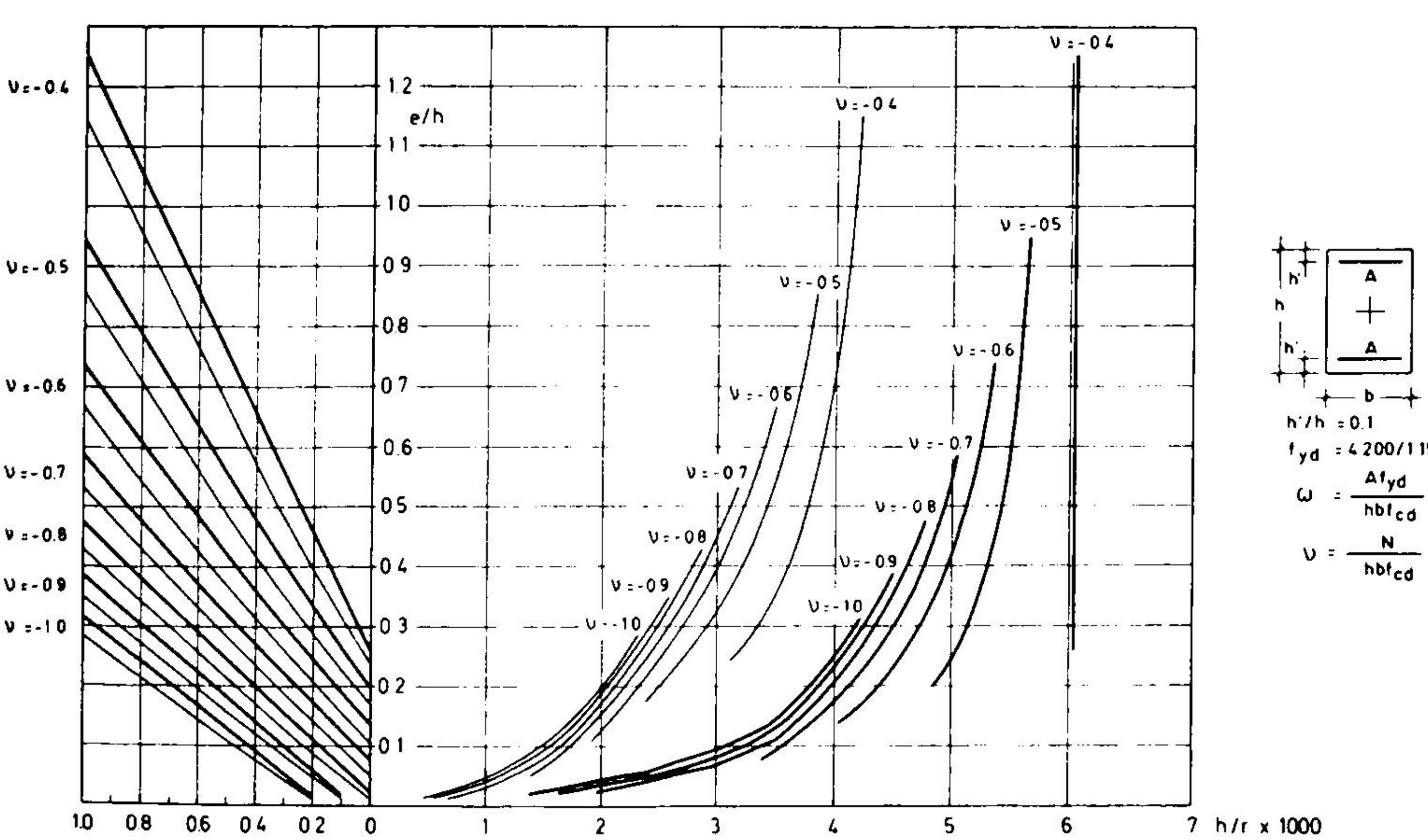


Fig. 11. Abaco de dimensionamiento $\nu \leqslant -0.4$.

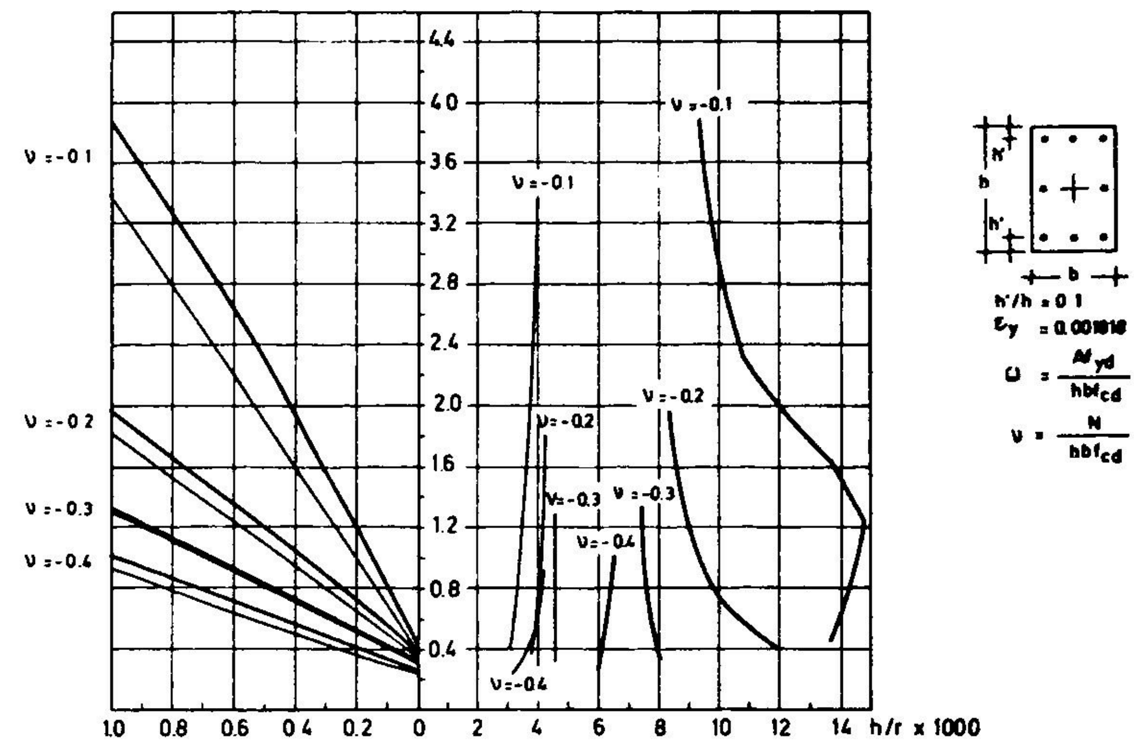


Fig. 12. Abaco de dimensionamiento $\nu \geqslant -0.4$.

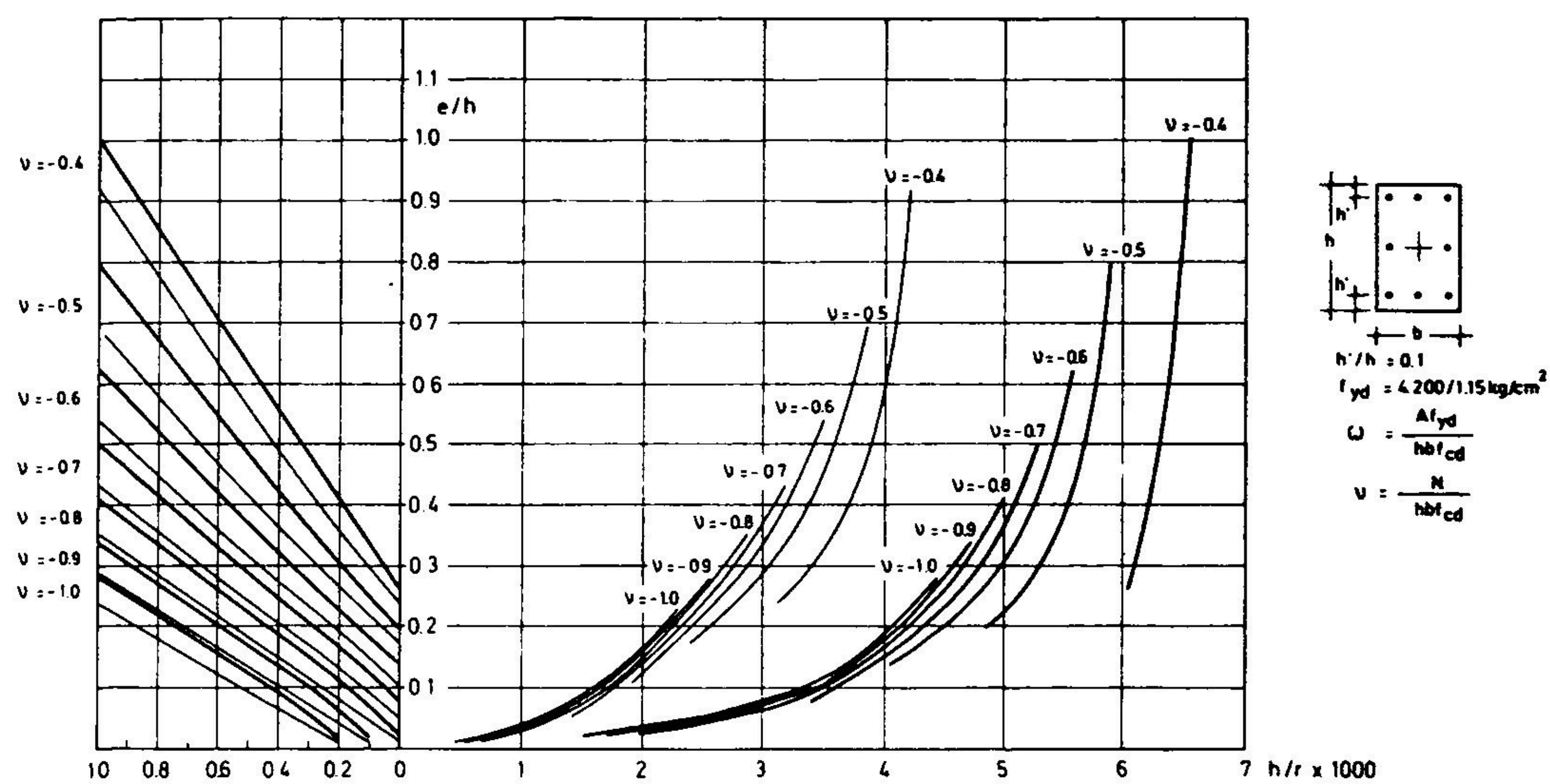


Fig. 13. Abaco de dimensionamiento $\nu \leqslant -0.4$.

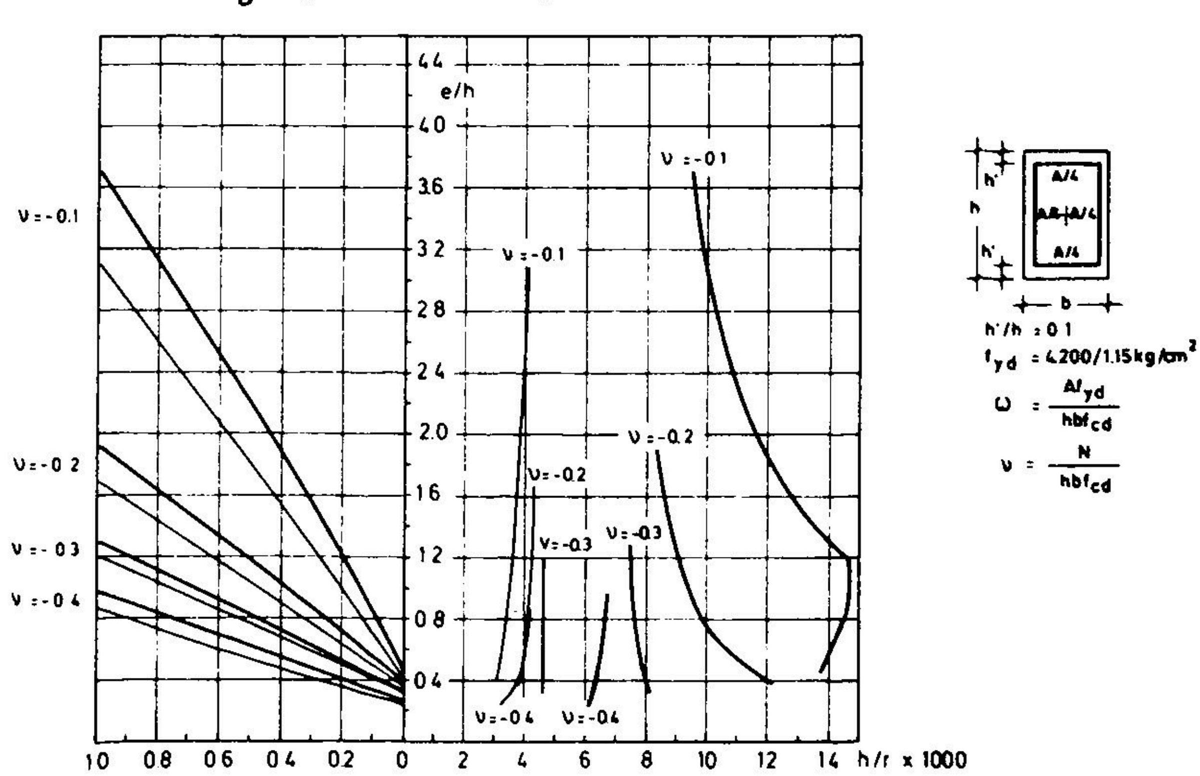


Fig. 14. Abaco de dimensionamiento $\nu \geqslant -0.4$.

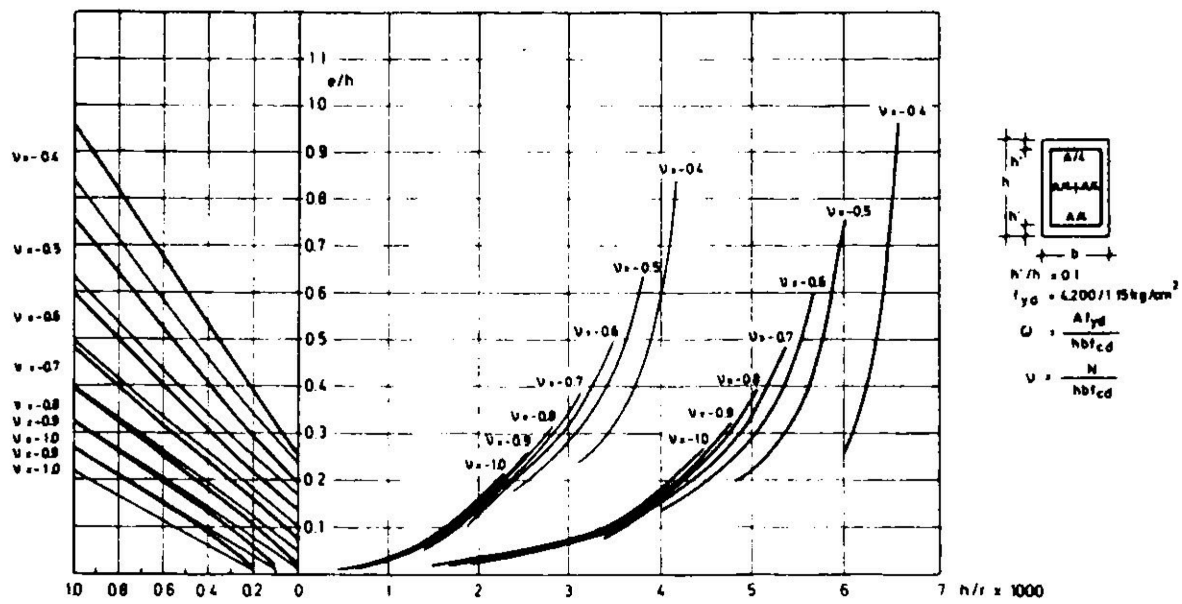


Fig. 15. Abaco de dimensionamiento ν = -0.4.

Cada ábaco está formado por dos partes diferentes. En la parte derecha se dibujan las curvas de curvaturas de referencia de agotamiento a inestabilidad para los distintos axiles. (e/h, h/r). Para evitar graduar las curvas de curvaturas de referencia en cuantías, en las parte de la izquierda se representa, para cada curva de la derecha, la curva e/h, ω correspondiente.

Forma de utilización

El proyectista debe calcular los parámetros adimensionales siguientes:

$$\nu = \frac{Nd}{bh \cdot f_{cd}}$$ axil reducido;

$$\frac{e_1}{h}$$ excentricidad relativa máxima;

$$\frac{e_2}{h}$$ excentricidad relativa mínima;

$$\lambda = \frac{l}{h}$$ esbeltez geométrica.

De acuerdo con el tipo de sección transversal elegido y el valor del axil ν, debe tomarse el ábaco adecuado.

En este ábaco se debe dibujar la directriz geométrica en el sistema coordenado h/r, e/h de la parte derecha del ábaco.

Se recuerda que los ábacos permiten la utilización de cualquier directriz geométrica, por ejemplo, la propuesta por el MCM o MDS.

La directriz geométrica dibujada cortará a la curva de curvaturas de referencia de inestabilidad y agotamiento correspondiente al axil del soporte, en dos puntos.

Luego deben trazarse dos rectas horizontales desde los dos puntos de intersección anteriores hasta cortar a las curvas e/h, ω correspondientes al axil del soporte, de la parte izquierda de los ábacos, en dos nuevos puntos.

Las cuantías de inestabilidad y agotamiento resultan las correspondientes a las abscisas de estos últimos puntos, que pueden ser fácilmente leidas sobre el eje de cuantías, ω

El menor de los dos valores de ω obtenidos, será la cuantía estricta de dimensionamiento e indicará el tipo de estado límite último (inestabilidad o agotamiento) correspondiente al soporte dimensionado.

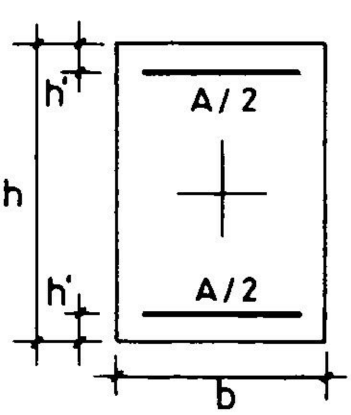
Tal como se ha explicado anteriormente el efecto de las cargas permanentes puede ser tenido en cuenta en los ábacos de dimensionamiento propuestos, utilizando el procedimiento lineal descrito, es decir, introduciendo una excentricidad debida a fluencia, e_c, como parte de la excentricidad de primer orden.

A continuación se desarrolla un ejemplo. El proyectista conoce los siguientes datos.

$$l = 7.35 \text{ m}$$
$$e_1, e_2 = 12 \text{ cm}$$
$$N = -6750 \text{ Kp}$$

El proyectista debe elegir tipo, dimensiones, distribución de armaduras y características de los materiales de la sección transversal

$$b = 30 \text{ cm}$$
$$h = 30 \text{ cm}$$
$$h' = 3 \text{ cm}$$
$$f_{yk} = 4\,200 \text{ kp/cm}^2$$
$$\gamma_c = 1.5$$
$$\gamma_s = 1.15$$
$$\gamma_f = 1.6$$



Utilizando los datos anteriores se deben calcular los parámetros adimensionales.

$$\nu = -0.6$$
$$\lambda = 24.5$$
$$e_1/h = 0.4$$

En la Fig. 16 se muestra el ábaco correspondiente a la sección transversal elegida y el axil de soporte a dimensionar.

Como puede verse, en ella se ha dibujado la directriz geométrica del soporte utilizando la hipótesis de distribución senoidal de curvaturas (MCM).

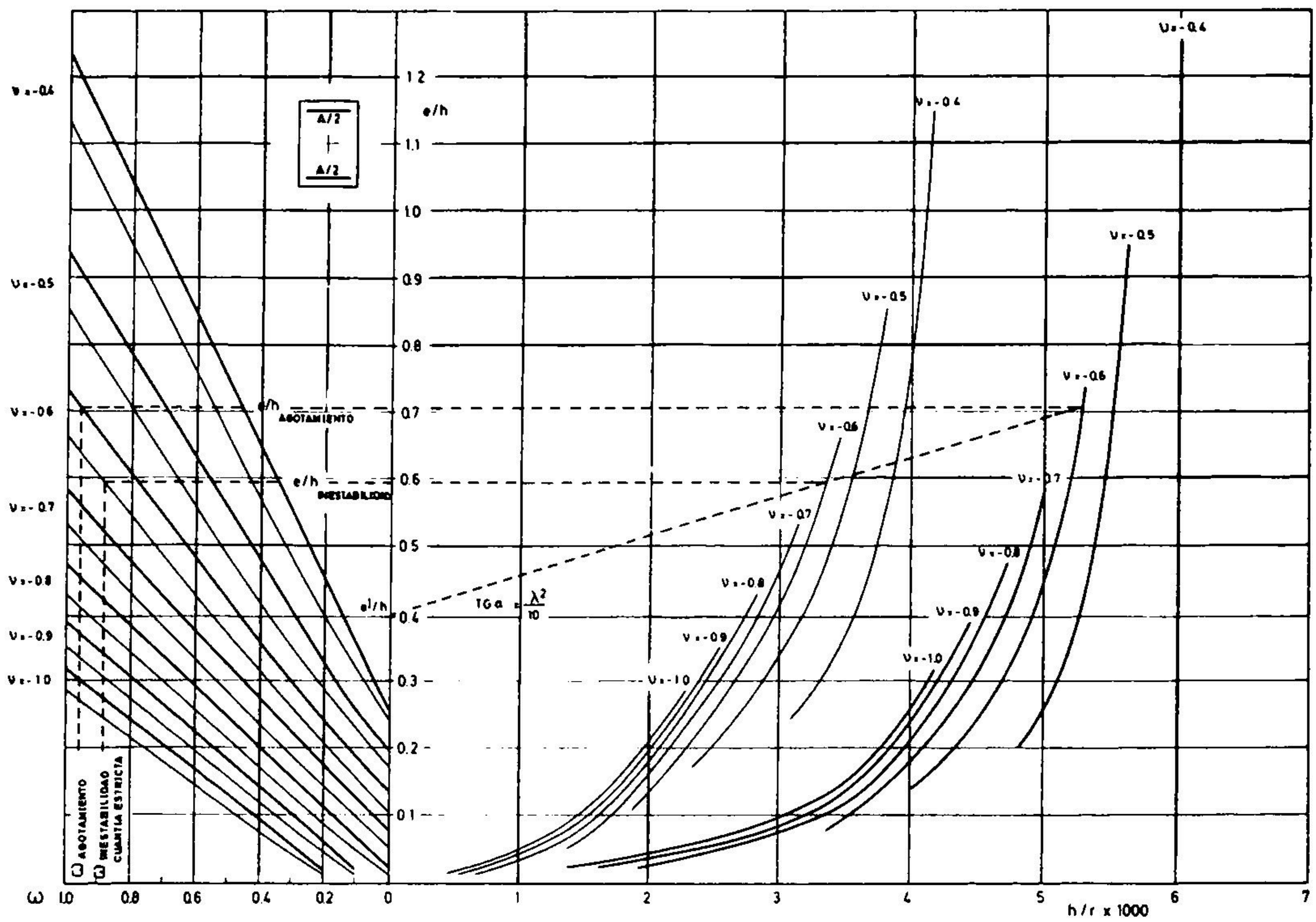


Fig. 16. Ejemplo de utilización. Abacos de dimensionamiento.

Siguiendo la construcción explicada se obtiene:

$$\omega_{\text{agotamiento}} = 0.96$$

$$\omega_{\text{agotamiento}} = 0.89$$

La cuantía estricta de dimensionamiento resulta:

$$\omega_{\text{inestabilidad}} = 0.89$$

Precisión y comparación con otros ábacos y tablas de dimensionamiento

Con objeto de estudiar la precisión de los ábacos de dimensionamiento propuestos se ha realizado un extenso chequeo, con ayuda de computadora, cuyos resultados se resumen en la Tabla I.

Para cada tipo de sección se ha procedido a la comprobación de los resultados obtenidos con los ábacos de dimensionamiento respecto de los datos por el MCM y el MDS respectivamente.

En cada comparación se han considerado 150 diagramas de interacción, correspondientes a los siguientes parámetros:

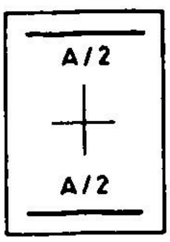
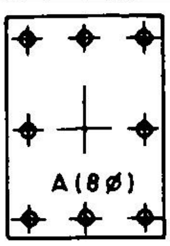
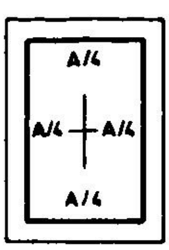
$$\lambda = 0;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25;$$

$$e_1/e_2 = 1;\ 0;\ -1;$$

$$\nu = -0.1; -0.2; -0.3; -0.4; -0.5; -0.6; -0.7; -0.8; -0.9; -1.0.$$

TABLA I

ESTUDIO PRECISION. ABACOS DE DIMENSIONAMIENTO

e_1/e_2	1				0				−1				
Sección transversal	Error Máximo positivo %	Error máximo negativo %	Error medio %	Desviación Estandar	Error máximo positivo %	Error máximo negativo %	Error medio %	Desviación Estandar	Error máximo positivo %	Error máximo negativo %	Error medio	Desviación Estandar	Método base
	0.0	-12	-0.2	0.8	0.0	-13	-0.5	1.5	0.0	-12	-0.5	1.5	Método C M
	0.0	- 9	-0.3	0.7	0.0	-13	-0.5	1.5	0.0	-12	-0.5	1.5	Método D S
	0.0	-20	-0.5	1.5	0.0	-22	-0.7	2.4	0.0	-22	-0.7	2.2	Método C M
	0.0	-16	-0.5	1.5	0.0	-22	-0.7	2.3	0.0	-22	-0.6	2.1	Método D S
	0.0	-24	-0.8	1.9	0.0	-24	-0.8	2.7	0.0	-22	-0.8	2.6	Método C M
	0.0	-20	-0.8	1.8	0.0	-23	-0.8	2.6	0.0	-22	-0.8	2.5	Método D S

$$\text{Error } \% = \frac{\nu_P - \nu_B}{\nu_B} \; 100$$

Para cada diagrama de interacción se han chequeado de 9 a 19 puntos, correspondientes a los valores de $\nu = 0; -0.1; -0.2; \ldots\ldots$, según el valor de la cuantía.

Para cada punto chequeado, el error correspondiente a los ábacos de dimensionamiento se ha computado como:

$$e\,\% = \frac{\nu_{AD} - \nu_{M\ Base}}{\nu_{M\ Base}} \cdot 100$$

siendo:

AD = Axil obtenido según ábaco de dimensionamiento propuesto.

M Base = Axil obtenido según método de base utilizado (MCM y MDS, respectivamente).

Ya que los axiles de compresión se han considerado negativos, los errores negativos corresponden a resultados del lado de la inseguridad siempre respecto a los resultados obtenidos mediante el uso del método de base utilizado.

El análisis de la Tabla I permite obtener las siguientes conclusiones:

1. No existen errores positivos, es decir, los ábacos de dimensionamiento siempre dan resultados del lado de la seguridad.
2. Los errores medios y desviaciones típicas siempre son pequeños. Los valores mayores encontrados son 1.1 y 2.9% respectivamente. De esta forma se puede aceptar la curva de curvaturas de referencia de inestabilidad como válida, ya que ésta constituye la única fuente de posibles diferencias entre el MCR y los métodos de base utilizados.
3. Los errores máximos negativos son puntuales, ya que tanto la media como la desviación son siempre valores muy pequeños, y se producen sólo para cuantías pequeñas.

Finalmente, en la Tabla II se muestra un cuadro comparativo de los distintos ábacos y tablas de dimensionamiento existentes y los ábacos propuestos.

TABLA II

CUADRO COMPARATIVO ENTRE DISTINTOS ABACOS Y TABLAS DE DIMENSIONAMIENTO

Parámetros	CEB-FIP Manual de Pandeo	Capra Davidovich	Beton Kalender 1976	Arenas	Corres
Sección trasversal	Rectangular Circular Diagonal	Rectangular Circular	Rectangular Circular	Rectangular	Rectangular
Distribución armadura	Angulos Uniforme	Angulos	Angulos Uniforme	Angulos	Angulos 8 redondos Uniforme
Recubrimiento relativo	0.10 0.15	0.125	0.05 0.10 0.15	0.10	0.05 0.10 0.15
Diagrama acero	Bilineal	Bilineal	Bilineal	Bilineal	Bilineal
f_{yk}	420 500	400	420 220	420	420
Coeficiente fluencia ϕ	0	0 2	0	0 1 2	Todos
Esbeltez $\lambda = l/d$	0-10-20 30-40	14-16-18-20 22-24-26-28 30-32-34-36 38-40-42-44	Todas entre 0-50	10-15-20 25-30-35 40-45-50	Todas
Relación excentricidades	1	1	1	1 0 -1	Todas
Número de ábacos	100 Tablas	64	12	81	18
Método	Columna Modelo	Columna Modelo	Windels Kordina Quast Nomogramas	Deformada Senoidal	Curvaturas Referencia
Norma	MC - 78	BAEL-80	DIN 1045-72	EH - 80	EH - 80

En el cuadro pueden distinguirse tres grupos de parámetros: en primer lugar parámetros relativos a la sección transversal, luego parámetros relativos al soporte y finalmente el número de ábacos y tablas correspondientes a cada propuesta.

FORMULA DE DIMENSIONAMIENTO

Fórmulas de dimensionamiento

A continuación se presentan unas fórmulas de dimensionamiento[21, 24] deducidos del método de las curvaturas de referencia.

Para obtener éstas fórmulas de dimensionamiento se ha partido de las hipótesis que se anotan a continuación.

Se considera como directriz geométrica la definida por el MCM, es decir, la que se deduce de adoptar una distribución senoidal de curvaturas en el soporte. Tal como se ha explicado, si bien esta directriz geométrica no representa estrictamente el caso de soportes equivalentes con excentricidades desiguales en las articulaciones, tiene la ventaja de una expresión sencilla y precisión adecuada.

Se sustituyen las curvas de referencia de inestabilidad y agotamiento y las curvas ω, e/h por rectas ajustadas por mínimos cuadrados. Tal como puede observarse en los ábacos de dimensionamiento en general, las curvas de curvaturas de referencia tienen aspecto de tramos de parábola. En la referencia 1 se han desarrollado fórmulas de dimensionamiento utilizando para el ajuste de las curvas de curvaturas de referencia parábolas y rectas; sin embargo, se ha observado que los resultados obtenidos con el ajuste por rectas no introducía grandes errores, a la vez que permitía una fórmula bastante más simple.

De esta manera, para cada tipo de sección, las curvas de curvaturas de referencia y la curva ω, e/h pueden expresarse:

$$h/r = \beta_1 + \beta_2 \cdot e/h \qquad 8$$

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot e/h \qquad 9$$

Los coeficientes β_1, β_2, α_1 y α_2 son los coeficientes de ajuste y se presentan tabulados en la Tabla III en función del axil ν.

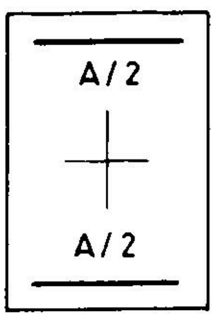
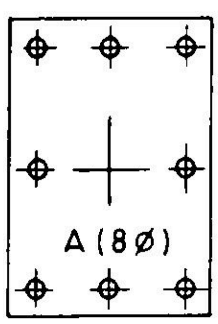
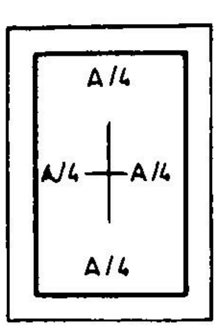
En la referencia 21 se han desarrollado asimismo tablas para distintos valores de h'/h.

Para cada axil ν se presentan dos juegos de valores de α y β que corresponden respectivamente a las curvas de curvaturas de referencia de agotamiento e inestabilidad.

Para la deducción de las fórmulas, es necesario recordar que se trata de obtener el valor de la cuantía correspondiente al punto de intersección entre la directriz geométrica y las curvas de curvaturas de referencia.

TABLA III

TABLA DE COEFICIENTES NUMERICOS PARA LA FORMULA DE DIMENSIONAMIENTO

Sección transversal	ν	Inestabilidad				Agotamiento			
		α_1	α_2	β_1	β_2	α_1	α_2	β_1	β_2
	-0.1	-0.10	0.26	3.11	0.22	-0.11	0.25	13.89	0.19
	-0.2	-0.18	0.51	3.73	0.25	-0.19	0.50	12.04	0.00
	-0.3	-0.23	0.75	4.54	0.00	-0.24	0.75	8.03	0.00
	-0.4	-0.23	1.08	3.14	1.03	-0.26	1.00	6.02	0.00
	-0.5	-0.22	1.43	2.27	2.01	-0.24	1.32	4.84	0.93
	-0.6	-0.17	1.77	1.76	2.81	-0.21	1.65	4.01	1.99
	-0.7	-0.10	2.08	1.42	3.53	-0.14	1.96	3.43	3.01
	-0.8	-0.02	2.37	1.06	4.58	-0.05	2.22	2.72	4.90
	-0.9	0.08	2.63	0.88	5.28	0.04	2.46	2.33	6.34
	-1.0	0.17	2.90	0.72	6.11	0.15	2.68	1.96	8.14
	-0.1	-0.14	0.33	3.08	0.28	-0.15	0.29	15.77	-1.83
	-0.2	-0.24	0.68	3.70	0.32	-0.26	0.63	11.65	-1.94
	-0.3	-0.31	1.00	4.54	0.00	-0.32	0.99	8.08	-0.58
	-0.4	-0.32	1.44	3.06	1.37	-0.35	1.34	5.91	0.67
	-0.5	-0.30	1.90	2.15	2.67	-0.31	1.75	4.90	1.50
	-0.6	-0.24	2.30	1.64	3.67	-0.27	2.04	3.93	2.90
	-0.7	-0.14	2.63	1.33	4.48	-0.19	2.37	3.35	4.19
	-0.8	-0.04	2.93	1.00	5.69	-0.08	2.61	2.67	6.36
	-0.9	0.06	3.22	0.85	6.48	0.02	2.85	2.35	7.81
	-1.0	0.16	3.52	0.70	7.45	0.12	3.06	2.05	9.56
	-0.1	-0.15	0.37	3.06	0.32	-0.16	0.31	15.54	-1.81
	-0.2	-0.27	0.76	3.69	0.36	-0.26	0.66	11.81	-2.15
	-0.3	-0.35	1.13	4.54	0.00	-0.33	1.03	8:08	-0.65
	-0.4	-0.37	1.63	3.01	1.55	-0.36	1.42	5.93	0.78
	-0.5	-0.35	2.13	2.09	3.00	-0.33	1.75	4.75	1.85
	-0.6	-0.28	2.56	1.59	4.09	-0.28	2.15	3.89	3.31
	-0.7	-0.17	2.89	1.30	4.93	-0.20	2.48	3.31	4.69
	-0.8	-0.05	3.17	0.98	6.19	-0.09	2.72	2.64	6.93
	-0.9	0.06	3.48	0.83	7.02	0.02	2.96	2.33	8.40
	-1.0	0.16	3.80	0.69	8.05	0.12	3.17	2.05	10.16

$h'/h = 0.10$ $f_{yk} = 420$ MPA $\gamma_s = 1.1$

Si la directriz geométrica puede expresarse:

$$e/h = e_0/h + h/r^* \frac{\lambda^2}{10} \qquad 10$$

sustituyendo la 8 en 10 se obtiene:

$$e/h = \frac{e_0/h + \beta_1 \cdot \beta}{1 - \beta_2 \cdot \beta}$$

siendo

$$\beta = \lambda^2 \cdot 10^{-4}$$

Es decir, se obtiene la excentricidad de la sección más solicitada. Finalmente el valor de la cuantía correspondiente a esta excentricidad viene dado por:

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot e/h \qquad 11$$

Forma de utilización

Para la utilización de las fórmulas simplificadas hay que seguir el procedimiento que a continuación se puntualiza.

1. El proyectista debe calcular los parámetros adimensionales siguientes:

$\nu = \dfrac{Nd}{bh \cdot f_{cd}}$	Axil reducido;
$\dfrac{e_1}{h}$	Excentricidad relativa máxima
$\dfrac{e_2}{h}$	Excentricidad relativa mínima
$\dfrac{e_0}{h}$	Excentricidad relativa equivalente
$\lambda = \dfrac{l_0}{h}$	Esbeltez geométrica
$\beta = \lambda^2 \cdot 10^{-4}$	Parámetro auxiliar.

2. De acuerdo con el tipo de sección elegida y el calor del axil, ν, se debe buscar en la tabla correspondiente:

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$	de inestabilidad
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$	de agotamiento.

3. Seguidamente se deben calcular los valores de e/h y ω de inestabilidad y agotamiento, utilizando las ecuaciones 10 y 11 con los valores de los coeficientes α y β respectivos.
4. El menor de los dos valores de ω obtenidos, será la cuantía estricta de dimensionamiento e indicará el tipo de estado límite último (inestabilidad o agotamiento) correspondiente al soporte dimensionado.

Tal como se ha explicado para los ábacos de dimensionamiento, el efecto de las cargas permanentes puede ser tenido en cuenta utilizando el procedimiento lineal, es decir, introduciendo la excentricidad debida a fluencia (e_c) como parte de la excentricidad de primer orden.

A continuación se describe el proceso de dimensionamiento, utilizando las fórmulas simplificadas, para el mismo soporte dimensionado con los ábacos de dimensionamiento propuestos.

Además de los parámetros adimensionales ya calculados, debe calcularse

$$\beta = 0.06$$

De la Tabla III para una sección con armadura simétrica en caras opuestas y $\nu = -0.6$ se obtiene:

Inestabilidad		Agotamiento	
α_1	$= 0.17$	α_1	$= 0.21$
α_2	$= 1.77$	α_2	$= 1.65$
β_1	$= 1.76$	β_1	$= 4.01$
β_2	$= 2.81$	β_2	$= 1.99$

y se calcula:

$$e/h = \frac{0.4 + 1.76 \cdot 0.06}{1 - 2.81 \cdot 0.06} = 0.61 \qquad e/h = \frac{0.4 + 4.01 \cdot 0.06}{1 - 1.99 \cdot 0.06} = 0.73$$

$$\omega = 0.17 + 1.77 \cdot 0.61 = 0.91 \qquad \nu = -0.21 + 1.65 \cdot 0.73 = 0.99$$

La cuantía estricta de dimensionamiento resulta entonces $\omega = 0.91$ e indica que el soporte alcanzará el estado límite último de inestabilidad.

Precisión y comparación con otras fórmulas simplificadas

Con objeto de estudiar la precisión de las fórmulas de dimensionamiento propuestas se ha realizado el mismo chequeo que para los ábacos de dimensionamiento. En la Tabla IV se muestra, en la última fila de cada tipo de sección, un resumen de los resultados obtenidos utilizando el MCM como método de base.

Del análisis de estos resultados se pueden sacar las siguientes conclusiones:

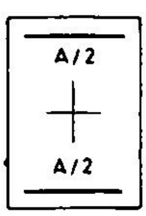
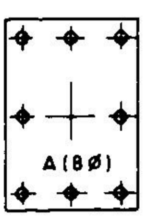
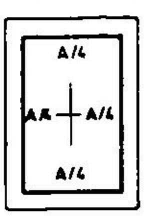
Las fórmulas simplificadas propuestas pueden dar errores positivos, es decir, del lado de la inseguridad, pero siempre muy pequeños. El valor máximo obtenido es de 3.6% con valores medios siempre negativos. Estos errores positivos son debidos al ajuste polinómico de las curvas de curvaturas de referencia. Sin embargo, una buena muestra de la validez de la simplificación adoptada la constituye el hecho de que estos errores son siempre muy pequeños.

Al igual que en el caso de los ábacos de dimensionamiento, tanto el valor medio del error como la desviación típica son siempre pequeños. Los valores máximos encontrados son 11 y 3.5% respectivamente.

La misma situación presentada con los ábacos de dimensionamiento se repite para las fórmulas simplificadas. Los errores máximos negativos son puntuales ya que tanto la media como la desviación típica son siempre valores pequeños y sólo se producen para pequeñas cuantías.

TABLA IV

ESTUDIO PRECISION FORMULAS DE DIMENSIONAMIENTO RESPECTO AL MCM

e_1/e_2	1				0				−1				
Sección trasversal	Error máximo positivo %	Error máximo negativo %	Error medio %	Desviación Estándar	Error máximo positivo %	Error máximo negativo %	Error medio %	Desviación Estándar	Error máximo positivo %	Error máximo negativo %	Error medio %	Desviación Estándar	Fórmula dimensionamiento
	5.9	-30	-5.0	7.4	18.2	-29	-2.8	7.2	6.9	-32	-4.6	8.5	CP110-72
	12.3	-34	-10.0	6.9	2.1	-38	-8.2	8.8	6.9	-22	-2.6	5.4	DIN1045-72
	48.9	-33	-2.0	14.4	35.3	-36	-2.6	10.1	30.7	-35	-1.7	7.3	ACI318-78
	1.4	-40	-11.0	8.6	2.6	-40	-7.9	10.1	2.9	-38	-5.9	9.5	EH-80
	3.6	-18	-0.0	1.8	3.6	-18	-0.5	2.0	3.4	-15	-0.5	1.9	FORMULA MCR
	16.0	-34	-3.6	8.0	19.1	-29	-2.1	7.2	7.5	-36	-4.4	8.2	CP110-72
	13.5	-28	-9.2	6.7	4.5	-31	-8.2	8.3	12.2	-19	-2.1	4.7	DIN1045-72
	61.1	-28	2.3	16.7	43.4	-30	-0.5	10.6	32.0	-31	-0.5	7.5	ACI318-78
	4.1	-42	-9.8	8.8	3.9	-42	-7.9	9.9	3.4	-40	-5.8	9.4	EH-80
	2.9	-22	-0.4	2.1	2.9	-22	-0.6	2.6	2.9	-20	-0.5	2.6	FORMULA MCR
	13.3	-34	-2.5	7.9	19.8	-30	-1.7	7.5	6.3	-34	-4.2	7.9	CP110-72
	12.1	-26	-8.3	6.3	3.4	-31	-7.9	7.9	12.2	-17	-1.8	4.4	DIN1045-72
	69.1	-26	4.2	17.3	47.0	-28	0.4	11.0	36.8	-30	-0.3	7.9	ACI318-78
	5.9	-43	-8.9	8.4	5.8	-43	-7.7	9.5	6.3	-41	-5.6	9.1	EH-80
	3.5	-24	-0.8	2.4	3.5	-24	-1.1	3.1	2.6	-22	-1.0	2.9	FORMULA MCR

$$\text{error } \% = \frac{\nu_P - \nu_B}{\nu_B} \, 100$$

Finalmente, también en la Tabla IV se muestran los resultados de la misma comparación correspondiente a otras fórmulas simplificadas existentes, que presentan los códigos CP 110 - 72 inglés, DIN 1045 - 72 alemán, ACI 318 - 78 americano y EH - 80 español.

En primer lugar resulta interesante recordar que las fórmulas de dimensionamiento propuestas son las únicas que permiten obtener directamente la cuantía estricta, mientras que todas las otras sólo permiten obtener un momento transformado para tener en cuenta los efectos debidos a la esbeltez, y obligan a la utilización de diagramas de interacción, ábacos, etc, para el cálculo de la armadura en flexión compuesta.

Otra diferencia importante es que las fórmulas de dimensionamiento propuestas permiten el dimensionamiento directo de soportes cortos presentando de esta manera la misma ventaja de continuidad, en cuanto a dimensionamiento de soportes cortos y esbeltos, que los ábacos de dimensionamiento.

Los resultados de la tabla IV, correspondientes a las fórmulas simplificadas propuestas por los códigos, hacen ver que:

En todos los casos, los errores positivos, del lado de la inseguridad, son altos. En particular, en el caso de la fórmula del ACI 318-78 el valor medio puede ser incluso positivo.

Los valores medios y desviaciones típicas son siempre mucho mayores que para la fórmula de dimensionamiento propuesta. Además, los resultados son difíciles de sistematizar, ya que tanto los errores positivos como los negativos se producen aleatoriamente y en principio no están vinculados a ciertas combinaciones de los parámetros que intervienen (λ, ν, etc).

CONCLUSIONES

El MCR presentado constituye un método de dimensionamiento directo general, ya que permite la obtención directamente de la cuantía, tanto para soportes cortos como para soportes esbeltos de forma contínua. Para el caso de soportes cortos permite obtener igual precisión que la que dan los diagramas de interacción de secciones. Para soportes esbeltos que alcanzan el estado límite último de agotamiento de la sección crítica, la precisión es igual que la de los métodos de comprobación MCM y MDS. Para soportes esbeltos que alcanzan el estado límite último de inestabilidad, los resultados coinciden con los de los MCM y MDS o resultan ligeramente del lado de la seguridad.

El MCR permite representar adecuadamente el fenómeno físico de soportes esbeltos ya que se tienen en cuenta separadamente los estados límites últimos de inestabilidad y de agotamiento de la sección crítica.

Respecto a su utilización, el MCR ha sido implementado mediante ábacos de dimensionamiento y fórmulas de dimensionamiento y así mismo puede utilizarse cómodamente con computadora, ya que constituye un algoritmo directo. Tanto los ábacos de dimensionamiento como las fórmulas simplificadas propuestas son de fácil utilización y permiten la solución del dimensionamiento con adecuada precisión.

BIBLIOGRAFIA

. COMITE EUROPEEN DU BETON. *Bulletin d'Information Nº 123 CEB-FIP Manual of buckling and instability*. diciembre 1977

. JAKOBSEN, K. *Design of slender reinforced concrete frames*. Institut für Baustatik. Zurich, noviembre 1973.

JOHNSTON, B.C. *The column research council guide to design criteria for metal compression members*. 2da Edición. J. Wiley, New York, 1976.

4. ACI COMMITTE 318. *Building code requirements for reinforced concrete,* ACI 318-77. American Concrete Institute. Detroit, 1978.
5. BAUMANN, O. Die Knickung der Eisen Beton-Saulen. *Eidg Materialprüfungsanstalt an der E.T.H. in Zürich.* Bericht N° 89. Zürich, 1934.
6. BROMS, B. y VIEST, M. Ultimate strength analysis of long hinged reinforced concrete columns. *Proceeding ASCE. ST1,* enero, 1958.
7. BROMS, D. y VIEST, M. Ultimate strength analysis of long restrained concrete columns. *Proceeding ASCE. ST3,* marzo 1958.
8. ROBINSON, J.; FOURE, B. y BOURGHLI, A. Le flambement des poteaux en beton armé chargés avec des excentricités diferentes a leurs extremités. *Anales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics.* N° 333, noviembre, 1975.
9. BROMS, B. y VIEST, M. Design of long reinforced concrete columns. *Proceeding ASCE. ST4,* julio 1958.
10. CAPRA, A. y DAVIDOVICI, V. *Guide practique d'utilisation des règles B.A.E.L 80.* Edition Eyrolles, Paris, 1980.
11. ARENAS DE PABLO, J. *Cálculo de soportes de hormigón armado en teoría de segundo orden.* Editores Técnicos Asociados, S.A. Barcelona 1980.
12. DEUTSCHER AUSSCHUSS FUR STAHLBETON. Beton und Stahl Beton Bau Bemess-ung und Ausführung, DIN 1045. 1942.
13. COMITE EUROPEEN DU BETON. Federation Internationale de la Precontrainte. *International recomendations for the design and construction of concrete structures.* Praga (Checoslovaquia), junio 1970.
14. CRANSTON, W. *Analysis and design of reinforced concrete columns.* Cement and Concrete Association. Research report N° 20. 1972.
15. BRITISH STANDARDS INSTITUTION. *British Standard code of practice for the structural use of concrete.* CP. 110-1972. Londres, 1972.
16. Mac GREGOR, J.; BREEN, J. y PFRANG, E. Design of slender concrete columns. *ACI Journal,* enero 1980.
17. VAN LEEUWEN, J. y VAN RIEL, C. *Ultimate load design of axial and excentrically compressed structural members.* Heron, 1966.
18. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. *Instrucción para el proyecto y ejecución de obras de hormigón en masa o armado EH-80.* Madrid, junio 1981.
19. CORRES, H. *Dimensionamiento de soportes esbeltos de sección constante de hormigón armado en estado límite último de agotamiento o inestabilidad. Método de curvaturas de referencia.* Tesis Doctoral. Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid 1980.
20. CORRES, H. y MORAN, F. *The reference curvature method for the direct design of slender reinforced concrete columns.* Comunication to the 4th Meeting of CEB Permanent Comission III "Buckling and Instability", Roma, abril 1981.
21. CORRES, H. y MORAN, F. 1.3.3. *Reference curvature method.* Contribution to the next CEB Bulletin on "Buckling and Instability". Madrid, mayo 1981.
22. CORRES, H. y MORAN, F. Dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado. 1ª parte. Método de las curvaturas de referencia. *Hormigón y acero,* 143.

23. CORRES, H. y MORAN, F. Dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado. 2ª parte. Abacos de dimensionamiento. *Hormigón y acero*, 143.

24. CORRES, H. y MORAN, F. Dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado. 3ª parte. Fórmulas de dimensionamiento. *Hormigón y acero*. 143.

25. CORRES, H. Análisis, obtención y sistematización de diagramas momento-curvatura de secciones de hormigón armado. *Hormigón y acero* (en preparación).

DESIGN OF SLENDER REINFORCED CONCRETE COLUMNS BY THE REFERENCE CURVATURE METHOD

SUMMARY

The results and conclusion from a theoretical research about the design of slender columns based on a curvatures of reference method are presented.